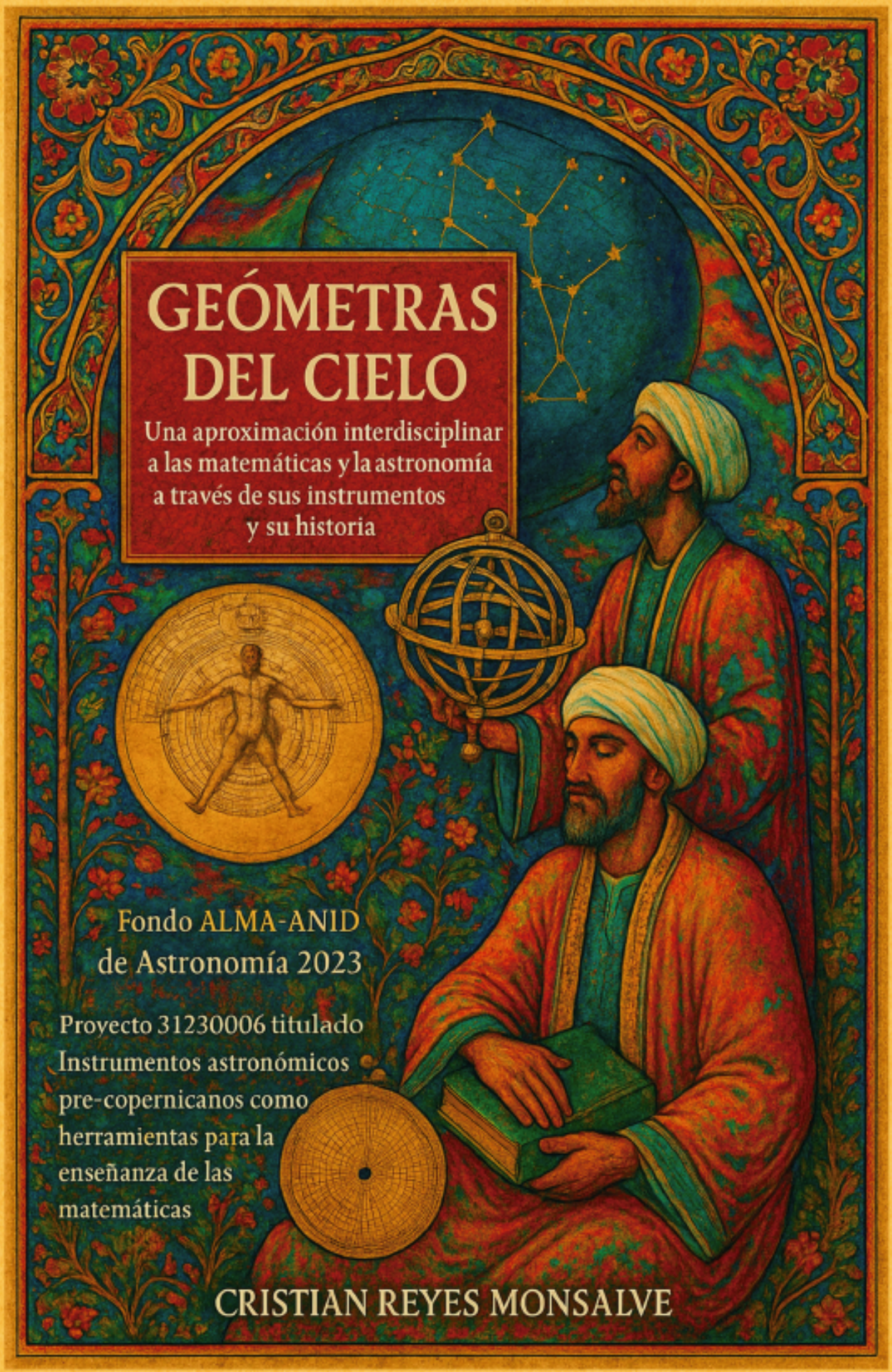

GEÓMETRAS DEL CIELO
Una aproximación interdisciplinar a las matemáticas y la astronomía a través de sus instrumentos y su historia
Fondo ALMA-ANID de Astronomía 2023
Proyecto 31230006 titulado Instrumentos astronómicos pre-copernicanos como herramientas para la enseñanza de las matemáticas
CRISTIAN REYES MONSALVE

پس انکه بترصید هر یک ازان
بشد پنج تا فاضل نکته دان

Geómetras del Cielo

Una aproximación interdisciplinar a las matemáticas y la astronomía a través de sus instrumentos y su historia

UNIVERSIDAD SAN SEBASTIAN
VOCACIÓN POR LA EXCELENCIA

GEO METRAS DEL CIELO

Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo
Ministerio de Ciencia, Tecnología, Conocimiento e Innovación
Gobierno de Chile

Cristian Reyes Monsalve
Doctor en Matemática por la Universidad Autónoma de Madrid (2021)
Máster en Historia de la Ciencia y Comunicación Científica por la Universitat de València (2022)
Académico del Departamento de Ciencias Exactas
Facultad de Ingeniería
Universidad San Sebastián
Concepción, Chile

© Cristian Reyes Monsalve, 2025

Primera edición: octubre 2025

Edición *e-book* (PDF)
ISBN: 978-956-423-521-9

Edición *rústica* (tapa blanda)
ISBN: 978-956-423-520-2

Registro de Propiedad Intelectual: N° 2025-A-9815

Impreso en *Camare Impresores* en septiembre de 2025.

Esta obra se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional (CC BY 4.0). Esto significa que usted puede compartirla y adaptarla para cualquier propósito, siempre que dé el crédito correspondiente al autor. Para ver una copia de esta licencia, visite:

https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Índice general

Lista de imágenes . . . . . **i**

Introducción **1**

Parte I: Las actividades y cómo realizarlas **7**

El astrolabio planisférico 9

Contenido de la actividad 9

Sugerencias para realizar la actividad 34

La esfera armilar 39

Contenido de la actividad 39

Sugerencias para realizar la actividad 59

Fundamentos teóricos 65

Contenido de la actividad 65

Sugerencias para realizar la actividad 102

Matemática, astronomía e historia 107

Contenido de la actividad 107

Sugerencias para realizar la actividad 133

El mundo cerrado y el universo infinito 137

Contenido de la actividad 137

Sugerencias para realizar la actividad 149

Parte II: Materiales utilizados **151**

Cómo conseguir un astrolabio planisférico (actividad 1) 153

Cómo conseguir una esfera armilar (actividad 2) 169

Cómo conseguir las esferas y semiesfera (actividad 3) 179

Cómo conseguir los materiales para la actividad 4 189

Agradecimientos **195**

Lista de imágenes

Todas las imágenes contenidas en este manual han sido utilizadas con fines exclusivamente educativos y de divulgación científica, sin fines comerciales ni de lucro, en el contexto del artículo 71b de la *Ley 17336 sobre Propiedad Intelectual de Chile*. La presente obra es de acceso libre y tiene como objetivo la promoción del conocimiento.

He procurado respetar los derechos de autor y licencias correspondientes en cada caso. Si he utilizado alguna imagen sin la atribución adecuada o en condiciones que requieren corrección, ruego a las personas interesadas comunicarse a mi correo electrónico.

`creyesm1992@gmail.com`

para proceder con las rectificaciones necesarias.

Cubierta: Imagen editada por Alejandra Ahumada a partir de una imagen generada con inteligencia artificial (ChatGPT/OpenAI), 2025.

Contracubierta: Imagen editada por Alejandra Ahumada a partir de una imagen generada con inteligencia artificial (ChatGPT/OpenAI), 2025.

Imágenes de apertura y cierre: Astrónomos otomanos trabajando para Taqi al-Din en el Observatorio de Estambul, de Wikimedia Commons. Autoría: Ala ad-Din Mansur-Shirazi (Dominio público).

De aquí en adelante, si una página contiene más de una imagen, le agregaremos un número al lado. Por ejemplo, P129-3 será la tercera imagen de la página 129, donde el orden considerado es de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha.

Parte I

Capítulo 1

Todas las imágenes en este capítulo son de mi autoría.

Capítulo 2

Todas las imágenes en este capítulo son de mi autoría, con la única excepción de la siguiente imagen, a la cual le agregué el polo sur terrestre:

P53: Imagen de la zona antártica y la Base Glaciar Unión, facilitada por Matthew Hartloff.

Capítulo 3

Todas las imágenes en este capítulo son de mi autoría, con excepción de las siguientes dos imágenes:

P92-1: Esfera armilar (completa), de Wikimedia Commons. Autoría: ERASWK (CC0).
P92-2: Esfera armilar (fragmento), de Wikimedia Commons. Autoría: ERASWK (CC0).

Capítulo 4

P107-1: Busto de Pitágoras, de Wikimedia Commons. Autoría: Szilas (Dominio público).
P107-2: Retrato de Isaac Newton, de Wikimedia Commons. Autoría: Godfrey Kneller (Dominio público).
P108-1: Albert Einstein, de Wikimedia Commons. Autoría: Fotografía de Orren Jack Turner, Princeton, N. J. Modificada con Photoshop por PM Poon y luego por Dantadd (Dominio público).
P108-2: Gabriela Mistral, de Wikimedia Commons (CC BY-SA 4.0).
P108-3: Dalái Lama, de Wikimedia Commons. Autoría: Lonyi (CC0).
P108-4: John Milnor, de Wikimedia Commons. Autoría: George M. Bergman (CC BY-SA 4.0).
P108-5: Maryam Mirzakhani, retrato utilizado en el artículo "Iranian newspapers break hijab taboo in tributes" del *The Guardian*, 16 de julio de 2017. Crédito de la fotografía: Maryam Mirzakhani / Stanford University / EPA.

P110-1: Euclides, de Wikimedia Commons. Autoría: Justus van Gent (Dominio público).

P110-2: René Descartes, de Wikimedia Commons. Autoría: A. F. Hals (Dominio público).

P110-3: Isaac Newton, de Wikimedia Commons. Autoría: G. Kneller (Dominio público).

P110-4: Nikolai Lobachevski, de Wikimedia Commons. Autoría: Lev Kryukov (Dominio público).

P110-5: William Rowan Hamilton, de Wikimedia Commons (Dominio público).

P111: Imagen generada con inteligencia artificial (ChatGPT/OpenAI), 2025.

P112-1: Portada del libro *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, editado por Eleanor Robson y Jacqueline Stedall (Oxford University Press, 2009). Imagen obtenida de la página del producto en Amazon.

P112-2: Portada del libro *Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático*, de Imre Lakatos (Madrid: Alianza Editorial, 1978). Imagen obtenida de la página del producto en Amazon España.

P112-3: Portada del libro *Inventing the Mathematician: Gender, Race, and Our Cultural Understanding of Mathematics*, de Sara Hottinger (SUNY Press, 2016). Imagen obtenida de la página del producto en Amazon.

P112-4: Portada del libro *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*, de G. G. Joseph (Princeton University Press, 2010. Imagen obtenida de la página del producto en Amazon.

P114-1: Extensión del Imperio Macedonio en 323 a.C., imagen que edité a partir del Mapa del mundo de Wikimedia Commons, de Canuckguy (CC BY-SA 3.0).

P114-2: Extensión del Imperio Romano de Oriente en 555 d.C., imagen que edité a partir del Mapa del mundo de Wikimedia Commons, de Canuckguy (CC BY-SA 3.0).

P114-3: Extensión de la civilización islámica entre 622 y 750 d.C., imagen que edité a partir del Mapa de la expansión musulmana de Wikimedia Commons, de DieBuche (Dominio público).

P114-4: Algebra de Baldor, de Wikimedia Commons. Autoría: D. G. Terminel (Dominio público).

P118: Luna creciente, de Wikimedia Commons. Autoría: Paul Danase (CC BY-SA 4.0).

P119-1: Bandera de Turquía, de Wikimedia Commons. Autoría: David Benbennick (Dominio público).

P119-2: Bandera de Libia, de Wikimedia Commons (Dominio público).

P119-3: Bandera de Túnez, de Wikimedia Commons (Dominio público).

P119-4: Mezquita de Suleyman, de Wikimedia Commons. Autoría: Hunanuk (CC0).

P119-5: Mezquita de Suleyman (detalle del minarete), de Wikimedia Commons. Autoría: Hunanuk (CC0).

P119-6: Boceto realizado digitalmente del tímpano 1b del astrolabio de al-Khama'iri de Sevilla, fechado en el año 621 AH (∼1224 d.C.), y perteneciente a la colección de astrolabios del Museo de Historia de la Ciencia de Oxford (Inglaterra) (código 50934).

P120-1: Mezquita Omeya de Damasco, de Wikimedia Commons. Autoría: Vyacheslav Argenberg (CC BY-SA 4.0).

P120-2: Reloj de Sol de Ibn al-Shatir, tomada de David A. King, *In Synchrony with the Heavens, Volume 2: Instruments of Mass Calculation*, página 713. El libro está disponible en su página web.

P120-3: Esquema del reloj de Sol de Ibn al-Shatir, tomada de David A. King, *In Synchrony with the Heavens, Volume 2: Instruments of Mass Calculation*, página 713. El libro está disponible en su página web.

P120-4: Extensión del Califato Omeya en 750 d.C., de Wikimedia Commons. Autoría: DieBuche (Dominio público).

P121-1: Gazni y La Meca, imagen que edité a partir del Mapa de la expansión musulmana de Wikimedia Commons, de DieBuche (Dominio público).

P121-2: Cálculo de la quibla de al-Biruni, tomada de Glen Van Brummelen, *Heavenly Mathematics, The Forgotten Art of Spherical Trigonometry,* página 69.

P122: Damasco, Harrán y La Meca, imagen que edité a partir del Mapa de la expansión musulmana de Wikimedia Commons, de DieBuche (Dominio público).

P123-1: Astrolabio de Nastulus (Muhammad ibn 'Abdallah), datado en el año 315 AH (∼927 d.C.), colección de al-Sabah (Kuwait). Imagen disponible en Google, Arts & Culture.

P123-2: Astrolabio de Hamid ibn al-Khidr al-Khujandi, datado en 374 AH (∼984 d.C.) (periodo Buyid), procedente de Rayy (Irán) o Bagdad. Objeto de la colección del Museum de Arte Islámico de Doha (Qatar), código SI.5.1999. Imagen consultada en el artículo "Collection Highlight: The Astrolabe" del sitio web de Qatar Museums.

P123-3: Captura del video de YouTube "Uso del Astrolabio Universal de Alí Ibn Jálaf - Lección 6: Estrellas y Ascensiones", del canal de Óscar Ferro.

P123-4: Captura del video de YouTube "Uso del Astrolabio Universal de Alí Ibn Jálaf - Lección 4: la hora por el Sol", del canal de Óscar Ferro.

P124-1: Boceto realizado digitalmente de un astrolabio anónimo del norte de África, datado en el siglo XIII d.C., y perteneciente a la colección de astrolabios del Museo de Historia de la Ciencia de Oxford (Inglaterra) (código 41122).

P124-2: Boceto realizado digitalmente de una lámina universal de Azarquiel en el reverso de un astrolabio anónimo del norte de África, datado en el siglo XIII d.C., y perteneciente a la colección de astrolabios del Museo de Historia de la Ciencia de Oxford (Inglaterra) (código 41122).

P125-1: Portada del libro *Astrolabios en al-Andalus y los reinos medievales hispanos*, por Azucena Hernández Pérez (Madrid: Ediciones La Ergástula, 2018). Imagen obtenida de la página del producto en Amazon España.

P125-2: Portada del libro *Catálogo razonado de los astrolabios de la España medieval*, por Azucena Hernández Pérez (Madrid: Ediciones La Ergástula, 2018). Imagen obtenida de la página del producto en Amazon España.

P126: Astrolabio de Abd al-Karim al-Misri, datado en el año 633 AH (∼1235 d.C.), colección de The British Museum (Inglaterra). Autoría: The Trustees of the British Museum, con una licencia CC BY-SA 4.0.

P127: Sultanato Mameluco de Egipto en el año 1279 d.C., de Wikimedia Commons. Autoría: Gabagool (CC BY-SA 3.0).

P128-1: Mezquita Omeya de Damasco, de Wikimedia Commons. Autoría: Vyacheslav Argenberg (CC BY-SA 4.0).

P128-2: Muezin, de Wikimedia Commons. Autoría: Jean-Léon Gerôme (Dominio público).

P129: Ubicaciones de algunos muwaqqit, imagen que edité a partir del Mapa de la expansión musulmana de Wikimedia Commons, de DieBuche (Dominio público).

P130: Astrolabio universal de Ibn al-Sarraj, datado en el año 729 AH (∼1328 d.C.). Colección del Museo Benaki de Atenas (Grecia) (código 13178). Imagen disponible en la página web del Museo Benaki.

P131-1: Frente del astrolabio de Ahmad ibn Husayn ibn Baso (con lámina de latitud 36.5°), datado en el año 704 AH (∼1304 d.C.). Colección del Museo de Arte Islámico de Doha (Qatar) (código MW.394.2007). Imagen cedida por Azucena Hernández Pérez y fotografiada por Marc Pelletreau.

P131-2: Reverso del astrolabio de Ahmad ibn Husayn ibn Baso, datado en el año 704 AH (∼1304 d.C.). Colección del Museo de Arte Islámico de Doha (Qatar) (código MW.394.2007). Imagen cedida por Azucena Hernández Pérez y fotografiada por Marc Pelletreau.

P131-3: Lámina universal del astrolabio de Ahmad ibn Husayn ibn Baso, datado en el año 704 AH (∼1304 d.C.). Colección del Museo de Arte Islámico de Doha (Qatar) (código MW.394.2007). Imagen cedida por Azucena Hernández Pérez y fotografiada por Marc Pelletreau.

P131-4: Lámina de latitud 37.5° del astrolabio de Ahmad ibn Husayn ibn Baso, datado en el año 704 AH (∼1304 d.C.). Colección del Museo de Arte Islámico de Doha (Qatar) (código MW.394.2007). Imagen cedida por Azucena Hernández Pérez y fotografiada por Marc Pelletreau.

Capítulo 5

P138-1: *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, portada. Nicolas Copérnico. Primera edición en latín, 1543. Tomada de la versión digitalizada disponible en Internet Archive (Dominio público).

P138-2: *Cosmographia*, folio 3r. Petrus Apianus. Edición de 1564. Tomada de la versión digitalizada disponible en Internet Archive (Dominio público).

P138-3: *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, página 9v. Nicolas Copérnico. Primera edición en latín, 1543. Tomada de la versión digitalizada disponible en Internet Archive (Dominio público).

P140: Portada de *Del mundo cerrado al universo infinito*, por Alexandre Koyré, publicada por Siglo XXI Editores (México). Imagen tomada del sitio Librotea.

P141: Imagen generada con inteligencia artificial (ChatGPT/OpenAI), 2025.

P142: *Utriusque cosmi maioris scilicet et minoris metaphysica, physica atque technica historia...*, páginas 4-5. Robert Fludd. Primera edición de 1617. Tomada de la versión digitalizada disponible en Internet Archive (Dominio público).

P145-1: Horizonte y punto de fuga, imagen que edité a partir de la obra La Anunciación, de Wikimedia Commons. Autoría: Leonardo da Vinci (CC BY-SA 4.0).

P145-2: El sueño de Joaquín, de Wikimedia Commons. Autoría: Giotto (Dominio público).

P146: Entrega de las llaves a San Pedro, de Wikimedia Commons. Autoría: Pietro Perugino (Dominio público).

Parte II

Capítulo 1

Todas las imágenes en este capítulo son de mi autoría, con excepción de los pantallazos tomados al software *Astrolabe Generator* creado por Richard Wymarck, liberado bajo la licencia GPL-3.0.

Capítulo 2

Todas las imágenes en este capítulo son de mi autoría, con excepción de los pantallazos tomados al software Creality Print.

Capítulo 3

Todas las imágenes en este capítulo son de mi autoría, con excepción de las siguientes imágenes:

P179: Bola plástica transparente (Rayher, ref. 3945737), imagen tomada de la página de producto de Amazon España: Rayher 3945737 - Bola de plástico transparente, pack de 10 piezas.

P180: Globo celeste de 16 pulgadas (gores), American Geographical Society Library Digital Map Collection, University of Wisconsin–Milwaukee Libraries. Imagen consultada en el portal Digital Collections (ID 34088), UWM.

Capítulo 4

Todas las imágenes en este capítulo son de mi autoría, con elementos gráficos de Alejandra Ahumada, que incluyen la totalidad o un fragmento de las siguientes imágenes:

P190: Mapa del mundo, de Wikimedia Commons. Autoría: Canuckguy (CC BY-SA 3.0).

P191-1: Busto de Pitágoras, de Wikimedia Commons. Autoría: Szilas (Dominio público).

P191-2: Papiro de los Elementos de Euclides, de Wikimedia Commons. Autoría: University of Pennsylvania Museum of Archaeology and Anthropology (CC BY-SA 4.0).

P191-3: Mahoma predicando, de Wikimedia Commons (Dominio público).

P191-4: Batalla de Guadalete, de Wikimedia Commons. Autoría: Fondo Antiguo de la Biblioteca de la Universidad de Sevilla, Sevilla, España (Dominio público).

P191-5: Astrólogo sosteniendo un astrolabio, tomada de David A. King, *In Synchrony with the Heavens, Volume 2: Instruments of Mass Calculation*, página 15. El libro está disponible en su página web.

P191-6: Estudiosos en la Biblioteca Abasí, de Wikimedia Commons. Autoría: Zereshk (Dominio público).

P191-7: Retrato de al-Juarismi, de Wikimedia Commons. Autoría: Michel Bakni (CC BY-SA 4.0).

P191-8: Astrolabio de Nastulus (Muhammad ibn 'Abdallah), datado en el año 315 AH (∼927 d.C.), colección de al-Sabah (Kuwait). Imagen disponible en Google, Arts & Culture.

P191-9: Astrolabio de Hamid ibn al-Khidr al-Khujandi, datado en el año 374 AH (∼984 d.C.), del periodo Buyid, procedente de Rayy o Bagdad. Colección del Museo de Arte Islámic de Doha (Qatar) (código SI.5.1999). Imagen obtenida del artículo "Collection Highlight: The Astrolabe", publicado en el sitio de Qatar Museums.

P192-1: Cálculo de la quibla de al-Biruni, tomada de Glen Van Brummelen, *Heavenly Mathematics, The Forgotten Art of Spherical Trigonometry,* página 69.

P192-2: Astrolabio de Ali ibn Jalaf, presente en el Libro del saber de astrología, manuscrito atribuido a Alfonso X, Rey de Castilla (1221-1284), folio 87r (p. 162), digitalizado por la Biblioteca Histórica de la Universidad Complutense de Madrid. Obra titulada *Libro del saber de astrología* (también *Libros del Saber de Astronomía*), signatura BH MSS 156, Burgos, ca. 1276-1278. Imagen disponible bajo licencia CC BY-SA 4.0 en el portal Patrimonio Digital UCM.

P192-3: Alfonso X dictando, de Wikimedia Commons (Dominio público).

P192-4: Cuadrante giratorio, de Wikimedia Commons. Autoría: Bibliothèque nationale de France (CC BY-SA 4.0).

P192-5: Astrolabio de Ahmad ibn Husayn ibn Baso, datado en el año 704 AH (∼1304 d.C.). Colección del Museo de Arte Islámico de Doha (Qatar) (código MW.394.2007). Imagen cedida por Azucena Hernández Pérez y fotografiada por Marc Pelletreau.

P192-6: Astrolabio universal de Ibn al-Sarraj, datado en el año 729 AH (∼1328 d.C.). Colección del Museo Benaki de Atenas (Grecia) (código 13178). Imagen disponible en la página web del Museo Benaki.

P192-7: Reloj de Sol de Ibn al-Shatir, tomada de David A. King, *In Synchrony with the Heavens, Volume 2: Instruments of Mass Calculation*, página 713. El libro está disponible en su página web.

P192-8: Sepulcro de Leonor de Aragón, de Wikimedia Commons. Autoría: Tiberioclaudio99 (CC BY-SA 4.0).

P192-9: Discurso del método, página 382 (en el apéndice *La Géométrie*). Obra de René Descartes (1596–1650), primera edición publicada en Leiden en 1637 por Ian Maire. Imagen obtenida a través de Wikisource en francés (Dominio público).

P193-1: *The Method of Fluxions and Infinite Series; With Its Application to the Geometry of Curve-Lines*, página 46. Sir Isaac Newton. Primera edición en inglés traducida por John Colson; publicada en Londres por Henry Woodfall y vendida por John Nourse, 1736. Tomada de la versión digitalizada disponible en Internet Archive (Dominio público).

P193-2: Disco de Poincaré, de Wikimedia Commons. Autoría: Anton Sherwood (Dominio público).

P193-3: Cuaterniones, de Wikimedia Commons. Autoría: Cmglee (CC BY-SA 4.0).

P193-4: Retrato de David A. King, imagen en la portada del ensayo "The Renaissance of Astronomy in Baghdad in the 9th and 10th Centuries", digitalizado por Internet Archive desde la publicación original en Muslim Heritage (2003).

P193-5: Imagendo cedida por Azucena Hernández Pérez.

P193-6: Portada del libro *Astrolabios en al-Andalus y los reinos medievales hispanos*, por Azucena Hernández Pérez (Madrid: Ediciones La Ergástula, 2018). Imagen obtenida de la página del producto en Amazon España.

Introducción

El manual que tiene en sus manos tratará de manera detallada sobre el proyecto

"Instrumentos astronómicos pre-copernicanos como herramientas para la enseñanza de las matemáticas",

del Fondo ALMA-ANID de Astronomía 2023, código 31230006, cuyo nombre comunicacional es ***"Geómetras del Cielo".***

Este fue un proyecto de divulgación científica que transcurrió entre los años 2024 y 2025, y consistió en la puesta en marcha de una serie de cinco actividades interdisciplinares realizadas anualmente en varios puntos de nuestro país, principalmente en la zona sur.

Combinando lo teórico y lo práctico, lo que hicimos fue mostrar —a través del uso de los sentidos, el razonamiento matemático y la reflexión histórica— varias de las múltiples caras de dos de los más famosos instrumentos astronómicos antes de la llegada del telescopio: el astrolabio planisférico y la esfera armilar.

Mediante una aproximación interdisciplinar hacia estos objetos, realizamos actividades que incorporaron de manera coherente la astronomía, las matemáticas, la historia y la cultura material de la ciencia. Con todo ello buscamos generar interés en estudiantes y profesores que deseaban aprender no solamente sobre astronomía y matemática, sino también sobre la historia y la cultura en un sentido más amplio.

Objetivos del proyecto

El objetivo general de este proyecto fue acercar las matemáticas y la astronomía a estudiantes de enseñanza media y profesores, mediante actividades interdisciplinares de divulgación.

Este objetivo tuvo como hilo conductor la estrecha interrelación histórica que ha existido entre el desarrollo de las matemáticas —especialmente la trigonometría— con el propio desarrollo de la astronomía.

Para ello hicimos énfasis en cómo ciertos elementos conceptuales y materiales del periodo pre-copernicano, como lo son respectivamente la cosmología geocéntrica y los instrumentos científicos derivados de ella —astrolabios y esferas armilares—, han influido decisivamente en el despliegue histórico de las ciencias exactas, incluyendo su transmisión y enseñanza. Siendo más específicos, la medición de las posiciones del Sol y las estrellas sobre la esfera celeste nos sirvió de puente que va desde el uso tangible de los instrumentos hacia la complejidad teórica y cultural de realizar dichas mediciones, a través del uso de herramientas matemáticas.

El proyecto contemplaba los siguientes tres objetivos específicos:

(1) En primer lugar, promover el uso de objetos tangibles para la enseñanza y el aprendizaje de la astronomía y las matemáticas, a través del astrolabio planisférico, la esfera armilar y la esfera celeste.

Frente a un predominante uso de procedimientos y conceptos abstractos en estas disciplinas, el uso de objetos tangibles es una oportunidad para desarrollar en los estudiantes capacidades sensoriales que usualmente no son consideradas en estos contextos de aprendizaje.

En estos últimos años han existido iniciativas divulgativas a nivel nacional e internacional que también trabajan estas disciplinas con énfasis en la visualización y en el tacto. Por ejemplo, en matemáticas tenemos el proyecto "croMática" de la Dra. Mariela Carvacho, o el proyecto español de divulgación matemática "Divermates"; y por el lado de la astronomía tenemos el proyecto español "Astronomía Accesible" del Dr. Eduardo Pérez Montero, o el proyecto "Dedoscopio" del Núcleo Milenio TITANS.

(2) En segundo lugar, fomentar la interdisciplinariedad a través de un análisis de las conexiones entre la astronomía y las matemáticas, que involucre a su vez la historia cultural y material de ambas disciplinas.

Es fundamental reconocer que los astrolabios, las esferas armilares y las esferas celestes son objetos que no solamente son patrimonio del mundo de las abstracciones científico-matemáticas, sino que sus componentes materiales y estéticas han sido decisivas a la hora de definirlos como objetos de enorme valor cultural.

Estos instrumentos permiten conjugar de una manera natural y coherente mundos tan aparentemente diversos como la astronomía, la trigonometría plana y esférica, la historia de las ideas y la cultura material de la ciencia.

(3) En tercer lugar, fortalecer el aprendizaje de los estudiantes escolares en el Eje de "Geometría" en Matemáticas y en el Eje de "Física" en Ciencias Naturales.

Con relación a las Ciencias Naturales, las priorizaciones curriculares del Ministerio de Educación destacan que los estudiantes deben ser capaces de comprender la existencia de leyes naturales que rigen el cosmos; deben distinguir la teoría heliocéntrica del geocentrismo pre-copernicano; así como también deben tener un sentido estimativo del tamaño de nuestro planeta con relación al Sol y a los demás objetos del sistema solar.

Con relación a las Matemáticas, las priorizaciones subrayan la capacidad de los estudiantes de tener una clara capacidad de visualización bidimensional y tridimensional; de ser capaces de realizar mediciones y abordar cuantitativamente diversas situaciones geométricas; y de comprender los conceptos fundamentales de la trigonometría. Todo esto fue abordado con sumo cuidado en este proyecto.

Metodología utilizada

La metodología que empleamos en las actividades de este proyecto fue un permanente diálogo entre lo concreto/material y lo teórico/abstracto, separando su realización en 3 grandes fases interconectadas.

En primer lugar, la fase 1 consistió en el uso concreto y tangible de astrolabios, esferas armilares y la esfera celeste.

La fase 2, por su parte, consistió en la comprensión de los fundamentos teóricos/abstractos del universo pre-copernicano, abordando temas provenientes del mundo de la astronomía y las matemáticas.

Finalmente, la fase 3 consistió en abordar desde un punto de vista histórico y filosófico la dimensión cultural que rodea a estos instrumentos, poniendo énfasis en la cosmología pre-copernicana que les da sentido.

En resumen, las 3 fases interconectadas que hemos mencionado transitaron desde el uso de los sentidos al uso de la mente, pero no solamente eso: en paralelo transitaron también desde lo individual a lo colectivo, es decir, desde instrumentos aislados y su uso concreto hacia el estudio de las teorías científicas y los contextos socioculturales donde estos objetos florecieron, siendo estos parte de la llamada "Edad de Oro del Islam", entre los siglos VIII y XIV.

El aprendizaje progresivo propiciado por estas 3 fases está en plena concordancia con el modelo concreto-pictórico-simbólico adoptado por el Ministerio de Educación para la enseñanza de las matemáticas escolares, que promueve el uso de materiales concretos; una aproximación progresiva a la complejidad de los contenidos; así como también la comunicación y el aprendizaje cooperativos.

Finalmente, esta metodología permite desarrollar habilidades de tipo visual-espacial (geometría, instrumentos); de tipo lógico-matemático (teorías, cálculos); de tipo lingüístico-verbal (lectura, escucha); de tipo interpersonal (porque los estudiantes y profesores deben interactuar con sus pares en los grupos aleatorios que formamos en cada actividad); así como también la habilidad de trabajar de manera interdisciplinar.

Estructura del manual

Este manual consta de dos grandes partes, antecedidas por los agradecimientos y la lista de imágenes que hemos usado en este manual.

La primera parte consiste en una detalladísima explicación de cómo hicimos cada una de las cinco actividades del proyecto, separando en cada caso el contenido a explicar de las sugerencias específicas a tener en cuenta para optimizar el tiempo y el aprendizaje. Los capítulos de esta parte son los siguientes:

(1) El astrolabio planisférico. En este capítulo exploramos cómo utilizar el astrolabio planisférico, para medir las posiciones del Sol y las estrellas en el cielo.

(2) La esfera armilar. En este capítulo nos dedicamos a estudiar cómo utilizar la esfera armilar, para determinar la posición del Sol vista desde distintos lugares de nuestro planeta.

(3) Fundamentos teóricos. En este capítulo abordamos los aspectos matemáticos y astronómicos que nos permitirán comprender un universo esférico, del cual eventualmente emergerán los instrumentos de las dos actividades anteriores.

(4) Matemática, astronomía e historia. En este capítulo nos enfocamos en la historia de las matemáticas y cómo esta se enriquece al mezclarla con la astronomía y sus instrumentos en la antigüedad. Para ello nos focalizamos en la intersección entre matemáticas, astronomía, religión y sociedad dentro de la civilización islámica, porque es un excelente ejemplo de cómo se interpenetran ciencia y sociedad en un contexto específico del pasado.

(5) El mundo cerrado y el universo infinito. En este capítulo hacemos un esfuerzo por comprender qué significaría *percibir* un universo cerrado desde un punto de vista más filosófico.

La segunda parte de este manual consiste en una también detallada exposición de cómo conseguir los materiales para las primeras cuatro actividades (la quinta es una breve charla y la premiación, no hay materiales a utilizar). Los capítulos de esta parte son los siguientes:

(1) Cómo conseguir un astrolabio planisférico (actividad 1). Aquí explicamos paso a paso cómo conseguir los archivos digitales que contienen las distintas piezas de su futuro astrolabio, para luego dar las indicaciones de cómo realizarlo materialmente en terciado y acrílico.

(2) Cómo conseguir una esfera armilar (actividad 2). Aquí detallamos cómo conseguir los archivos digitales para imprimir en 3D las piezas de estos instrumentos, indicando las configuraciones de impresión más adecuadas que usamos en el proyecto. Luego explicamos de manera minuciosa cómo emsamblar y pegar dichas piezas, para obtener una esfera armilar funcional.

(3) Cómo conseguir las esferas y semiesfera (actividad 3). Aquí explicamos cómo conseguir una esfera que represente el universo geocéntrico, con las estrellas y la eclíptica en su superficie, y luego mostramos paso a paso cómo lograr una semiesfera para visualizar la proyección estereográfica.

(4) Cómo conseguir los materiales para la actividad 4. Aquí dejamos a disposición el mapa y las cartas que utilizamos en la actividad de historia.

A quién va dirigido este manual

Los principales destinatarios que tuve en mente para recibir este manual siempre fueron los profesores escolares que participaron con nosotros en estos dos años, con la intención de que el proyecto no muriese, sino que quedara perpetuado a través de ellos y las actividades que realizasen en sus colegios en torno a estos temas. Por ello es que este manual traza una serie de ideas que buscan ser, ante todo, ***replicables***, de la manera más amena y completa posible.

Esto no quita que también haya tenido en mente a los propios estudiantes escolares que participaron del proyecto, ya que el manual fue escrito con muchísimo cuidado para que sea legible por cualquier persona interesada en estos asuntos. Esto les permitirá seguir profundizando en los temas tratados en las actividades presenciales.

Por otro lado, también pensé en diversas personas que pudieran apreciar estos temas, sin haber participado directamente del proyecto, como por ejemplo:

(1) Los apasionados de los instrumentos científicos antiguos. No somos pocas las personas que nos encantan este tipo de objetos, como por ejemplo las calculadoras analógicas o los planetarios mecánicos. La gran gracia de los instrumentos trabajados en este proyecto, a diferencia de los dos recién mencionados, es que son fáciles de comprender y son razonablemente simples de conseguir, aparte de que son hermosos y están ligados a importantes sucesos de la historia de las ciencias. Todos los capítulos del 1 al 4 de la parte I tratan sobre estos instrumentos, pero definitivamente disfrutarán estudiando los primeros 2 capítulos, y apreciando las imágenes de astrolabios en el capítulo 4.

(2) Los apasionados de la Edad Media o de la civilización islámica. Es innegable que la Edad Media tiene un gran atractivo, porque todo en ella reviste un significado. El castillo, la princesa y el dragón son símbolos de temas que están profundamente arraigados en la psique humana, y la mitología de esta época estimula nuestra imaginación y eleva nuestro espíritu. Si a lo anterior le sumamos una cultura diferente a la occidental, como lo fue la civilización islámica, el encanto es todavía mayor: las cimitarras, los turbantes, los mocárabes y la hermosa caligrafía árabe. Y si adicionalmente a ello le sumamos los saberes que florecieron en esta civilización, y el cómo la religión propulsó los estudios matemáticos y astronómicos, tenemos entonces muchos motivos para leer este manual. No olvidemos que todo lo aquí escrito asume que debemos adoptar una postura geocéntrica, pre-telescópica, pre-año-1500, ¡Nos alejamos a propósito de la modernidad! Para estas personas los capítulos 4 y 5 de la parte I pudieran serles de gran interés. Y aquellos que desde esta vereda medieval filosofan sobre las relaciones entre el ser humano y el mundo, el recién mencionado capítulo 5 les resultará muy estimulante.

(3) Personas interesadas en la historia de la ciencia y la cultura material de la ciencia. Evidentemente no representan una mayoría, pero las personas que sientan gusto por leer sobre la historia de la ciencia y cómo ésta se ve enriquecida por los instrumentos científicos, sentirán una gran alegría al leer lo que en este libro planteamos. En particular el capítulo 4 les parecerá muy interesante, puesto que intento no solo hablar sobre los sucesos históricos, sino también sobre cómo los seleccionamos y construimos los relatos.

— o —

Te invito entonces a que te motives con estos temas, que hagas uso de tus sentidos, tu intelecto y tu imaginación para abordar las actividades a continuación.

¡Manos a la obra!

Parte I:
Las actividades y cómo realizarlas

Capítulo 1: El astrolabio planisférico

Palabras clave. *Cielo, cúpula semiesférica, azimut, altura, coordenadas horizontales, astrolabio, Sol, estrellas, araña, tímpano, alidada, eclíptica, salida del Sol, giro antihorario de la araña, puesta del Sol, pínulas, altura máxima del Sol, crepúsculo vespertino, crepúsculo matutino, crepúsculo astronómico, noche.*

Contenido de la actividad

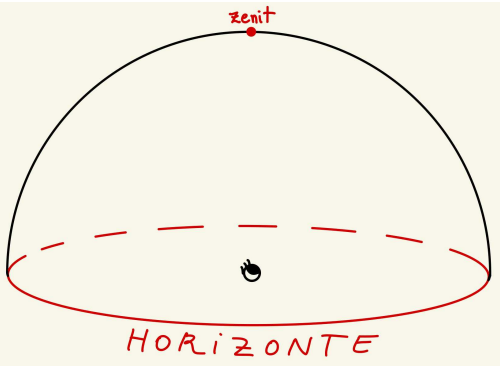
I. Introducción

En esta actividad estudiaremos cómo el instrumento científico llamado *astrolabio* nos permite determinar la posición de las estrellas y el Sol en el cielo. Para conseguir nuestro objetivo haremos dos cosas. En primer lugar, comprenderemos que es posible representar el cielo mediante una enorme cúpula tridimensional en la que se mueven las estrellas y el Sol. En segundo lugar, veremos de qué manera el astrolabio nos permite representar —no en 3 dimensiones, sino en 2— el movimiento de las estrellas y el Sol en dicha cúpula.

II. La cúpula del cielo

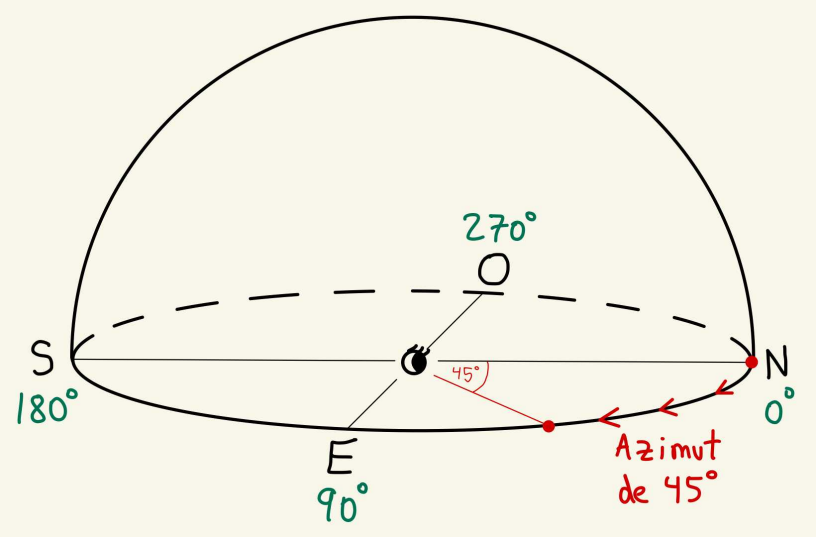
En el cielo todo se ve muy lejano, y nuestros sentidos no nos dan una buena razón para suponer que hay cosas más cerca y otras más lejos (a excepción quizás del Sol y la Luna). Por esa razón podemos suponer que todo está tremendamente lejos, *pero a una misma distancia*, y por ello el cielo sobre nuestras cabezas es como una semiesfera gigantesca, con nosotros en su centro, desde donde observamos el movimiento de los objetos allá arriba.

Al punto más alto sobre nuestras cabezas lo llamaremos *zenit*, y todos los puntos que están a la altura de nuestros ojos forman lo que llamaremos el *horizonte*, que es el círculo que define la "base" de nuestro enorme cielo semiesférico.

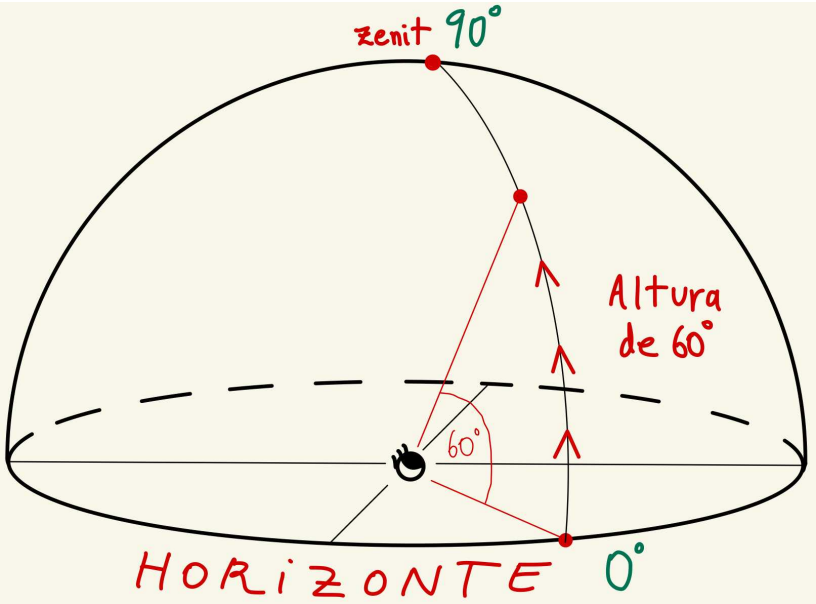


Como bien iremos viendo, para ubicar una estrella o el Sol en la cúpula semiesférica del cielo bastará con conocer solamente 2 ángulos: el ángulo horizontal, que llamamos *azimut*, y el ángulo vertical, que llamamos *altura*. Comencemos estudiando el azimut.

El azimut nos indica cuántos grados nos estamos moviendo en sentido horizontal, y está en estrecha relación con los puntos cardinales. En vez de dividir el horizonte solamente en 4 partes con las direcciones usuales (Norte, Sur, Este y Oeste), lo dividiremos en 360 partes iguales, asignando un ángulo desde 0° a 360° a cada posible dirección en el horizonte. Convenimos que Norte = 0°, Este = 90°, Sur = 180° y Oeste = 270°, midiendo el azimut desde el Norte y girando hacia el Este. En la imagen de abajo tenemos un punto con azimut de 45°.

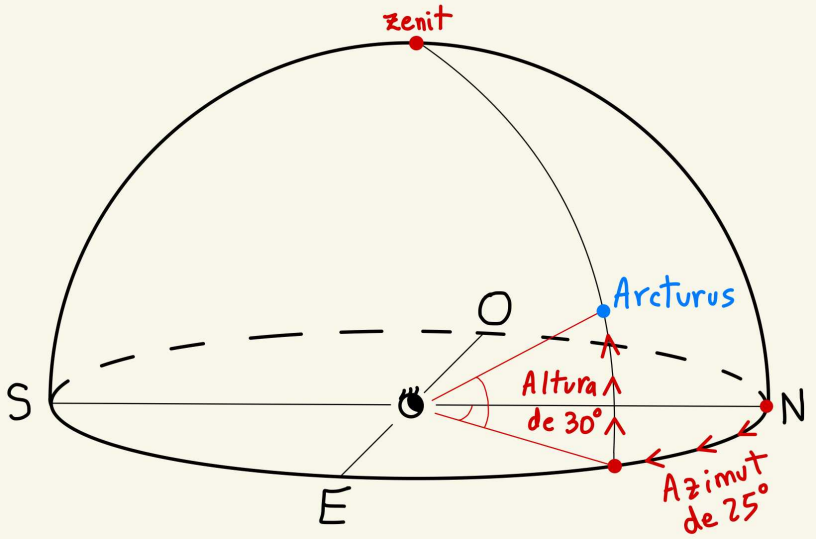


Por otro lado, la altura nos indica cuántos grados nos estamos moviendo en sentido vertical, siendo positivo si miramos hacia arriba y negativo si miramos hacia abajo. Si algo está a la altura de nuestra visual, entonces estará a 0° de altura, mientras que si está en el zenit estará a 90° de altura. En la imagen de abajo tenemos un punto con altura de 60°.

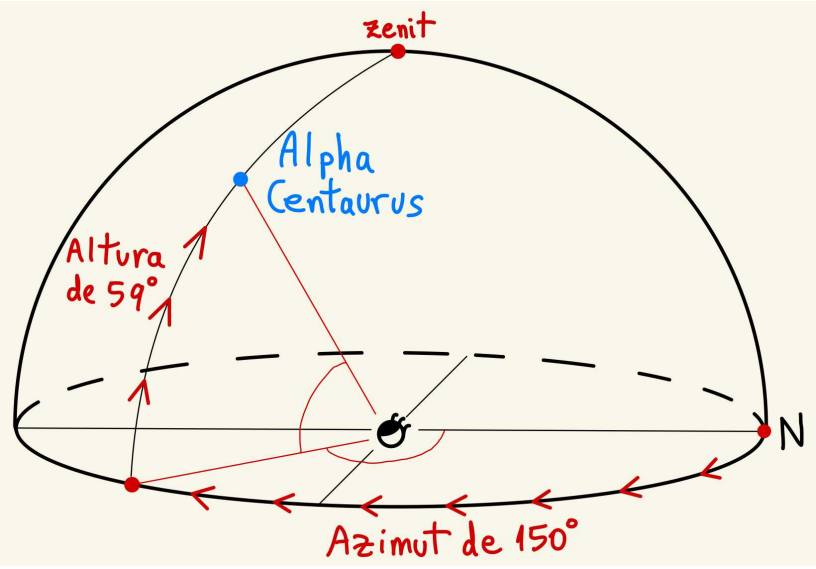


Para ver un ejemplo astronómico concreto, pensemos en el cielo del día 10 de mayo. Destacamos este día porque ahí fue la inauguración oficial de este proyecto en el año 2024.

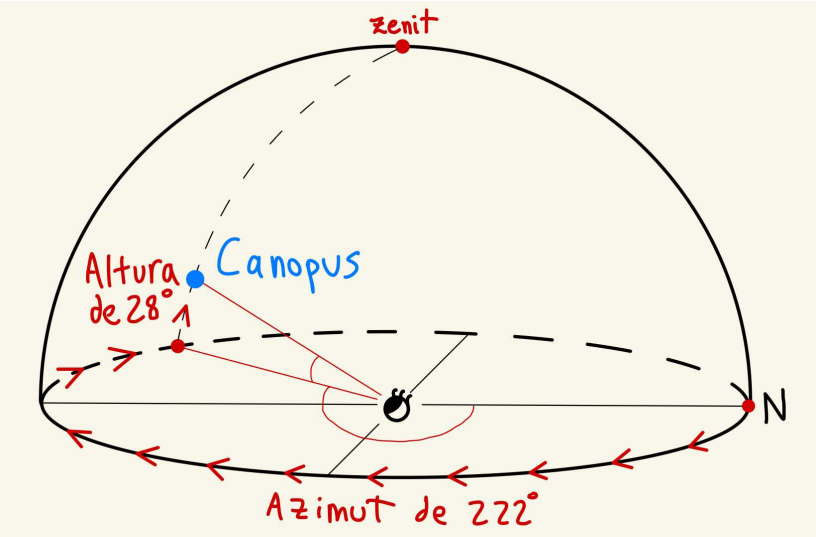
Nosotros mismos podríamos confirmar con nuestros propios ojos que en la noche del 10 de mayo, a las 22:20 hrs, la estrella *Arcturus* tiene un azimut de 25° y una altura de 30°. Esto significa que para ver esta estrella en el cielo primero miraremos el punto Norte sobre el horizonte, luego nos moveremos 25° hacia el Este, y finalmente nos moveremos 30° hacia arriba.



A esa misma hora de la noche del 10 de mayo la estrella *Alpha Centaurus* tiene un azimut de 150° y una altura de 59°. ¿Cómo podemos identificarla en la cúpula? Al igual que antes, comenzamos en el punto Norte sobre el horizonte, nos movemos 150° hacia el Este (llegando casi al Sur), y desde ese punto nos movemos 59° hacia arriba.

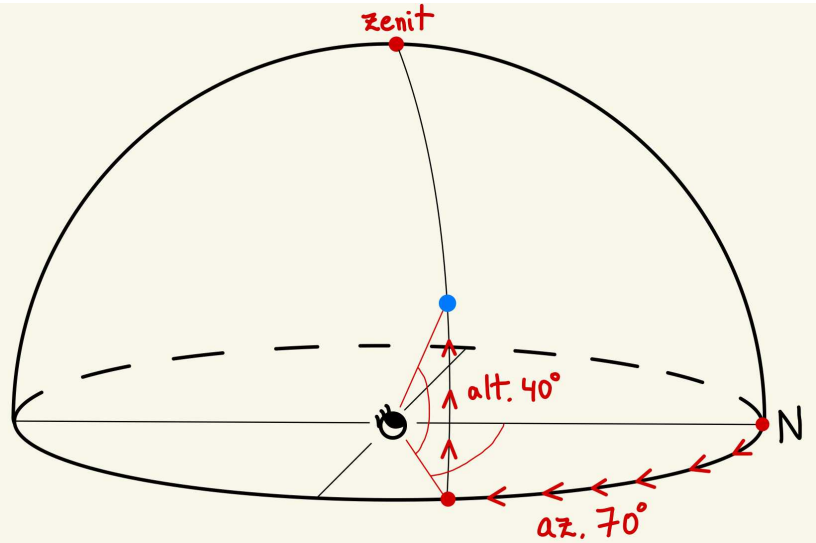


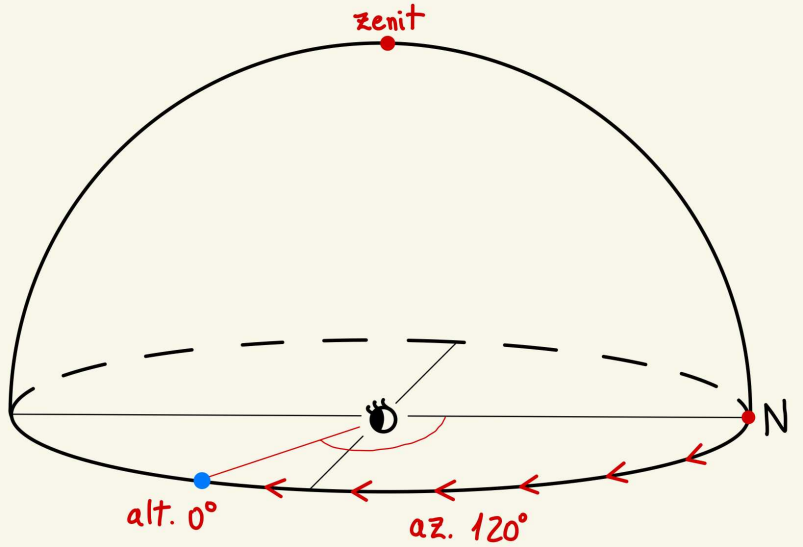
También en ese mismo momento, la estrella *Canopus* tiene un azimut de 222° y una altura de 28°. ¿Cómo hacemos para identificarla? Lo mismo: ubicamos el Norte sobre el horizonte, nos movemos 222° hacia el Este (pasándonos del Sur con el giro), y luego nos movemos 28° hacia arriba.

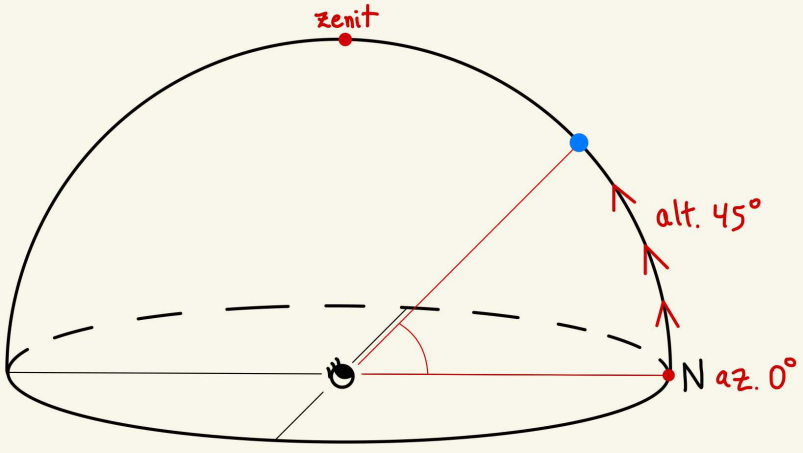


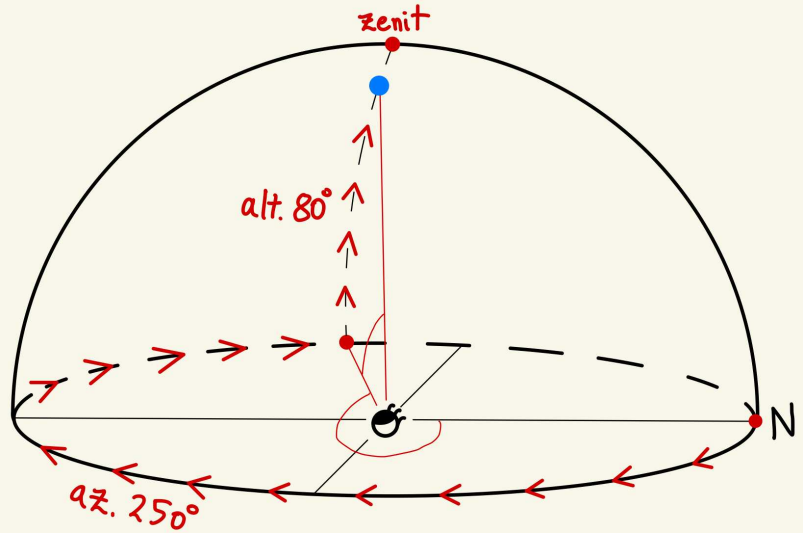
Notemos que con la estrella *Canopus* nos pasamos a "la parte de atrás" de la cúpula, por eso es que dibujamos el azimut con una línea punteada.

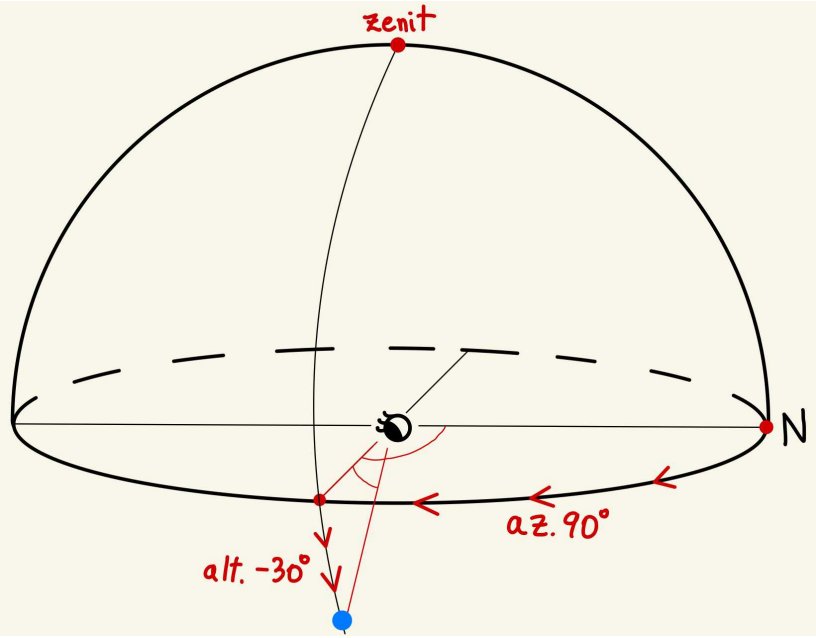
Aunque los ejemplos aquí abajo no representen ninguna estrella específica, nos servirán para reforzar lo aprendido hasta ahora.




zenit
N
alt. 0°
az. 120°

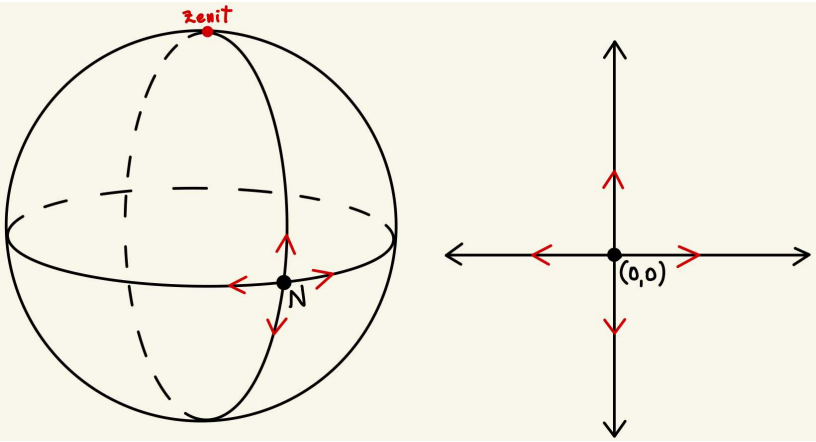

zenit
alt. 45°
N az. 0°


zenit
alt. 80°
N
az. 250°



Hemos aprendido que para ubicar cualquier punto en la cúpula del cielo es suficiente con calcular solamente 2 angulitos: el azimut y la altura. A este par de números los llamaremos las *coordenadas horizontales*, ya que, como bien iremos viendo, ambos dependen del horizonte del que está observando el cielo, lo cual a su vez depende del lugar del planeta desde el cual esté observando el firmamento.

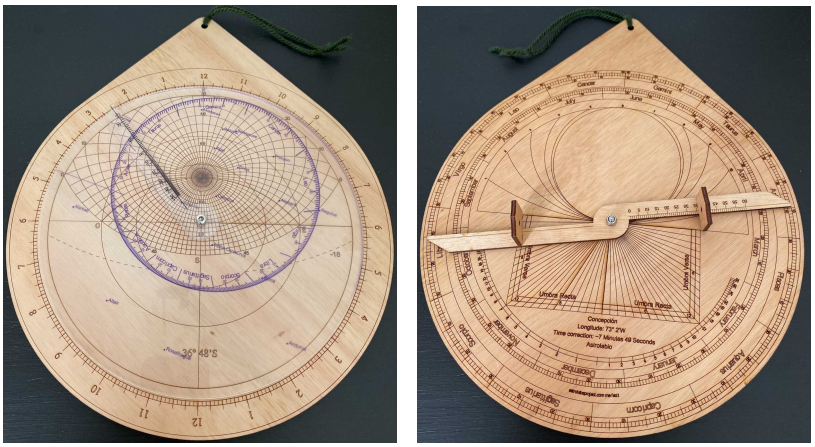
En realidad, las dos coordenadas angulares que acabamos de ver forman una versión "redonda" de lo que usualmente vemos en la escuela con el nombre de "plano cartesiano". Recuerde que el "origen" de este último es el punto $(0, 0)$, mientras que el Norte sobre el horizonte de la cúpula también tiene coordenadas $(0, 0)$, puesto que tiene azimut 0 y altura 0. Las imágenes a continuación muestran bien la situación:



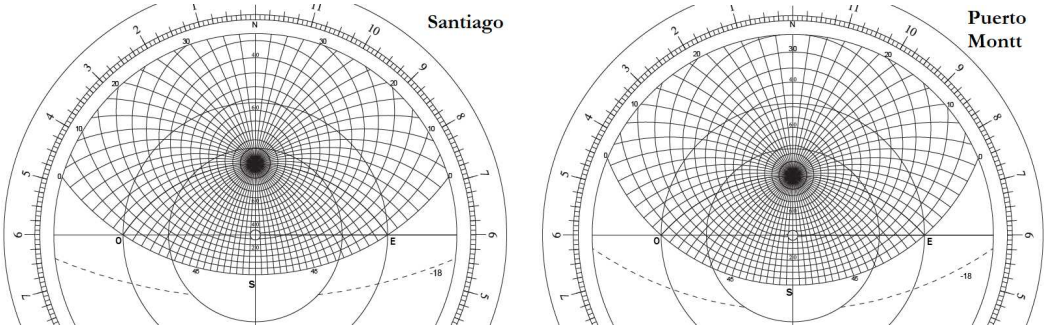
Ahora veremos cómo hacer estos cálculos de coordenadas sobre la cúpula celeste utilizando el astrolabio: el instrumento principal de esta actividad.

III. Astrolabio y coordenadas de estrellas

El *astrolabio planisférico*, que desde ahora en adelante llamaremos simple y llanamente *astrolabio*[1], es un instrumento científico que sirve para calcular las coordenadas horizontales —es decir, azimut y altura— tanto del Sol como de las estrellas más notables del cielo. Aunque haya sido construido hace más de 1000 años en un poderoso material como lo es el latón, en este proyecto trabajaremos con una versión más humilde, en terciado y acrílico. Tanto el frente como el reverso de los astrolabios de nuestro proyecto lucen como muestran las imagenes siguientes.



Con este instrumento podremos realizar cálculos sobre la posición del Sol y las estrellas para cualquier día del año, aunque solamente podamos usarlo en una latitud específica. En particular, el que usaremos nosotros en este libro funciona solamente para la latitud de la ciudad de Concepción, Chile, que es de 36.8° Sur. Para realizar estudios en otras latitudes será necesario usar otros astrolabios[2], cuyas diferencias podemos apreciar en las imágenes a continuación[3].

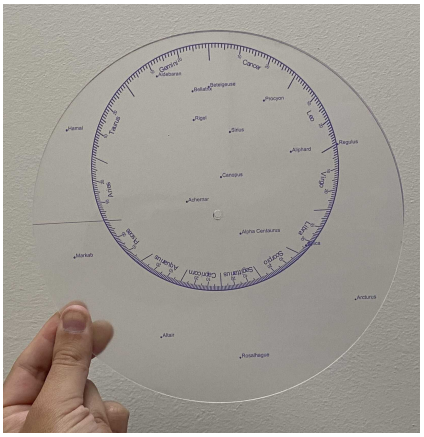


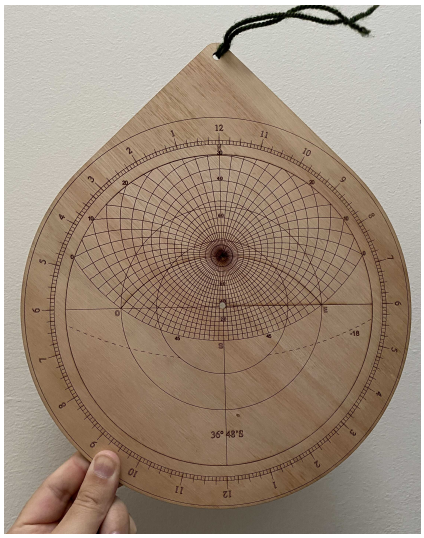
[1] La palabra *astrolabio* puede referirse a varios instrumentos científicos, como por ejemplo el *astrolabio náutico*, el *astrolabio esférico*, el *astrolabio universal*, el *astrolabio lineal*, o el *astrolabio planisférico*. Este último es al que nosotros nos referiremos con la palabra *astrolabio*, por el hecho de que históricamente ha sido el más interesante de todos.

[2] Al final de la sección de sugerencias de este capítulo mostraremos los distintos valores utilizados en el proyecto para los ejemplos de cada uno de los territorios del país.

[3] Santiago y Puerto Montt tienen una latitud sur de 33.4° y 41.4°, respectivamente.

Notemos, en primer lugar, que la parte frontal de nuestro instrumento tiene 2 partes. Por un lado, tenemos una lámina circular de acrílico, que contiene un círculo descentrado y una serie de puntos con nombres a su lado. Por otro lado, debajo de esta lámina de acrílico tenemos una lámina redonda de terciado, que contiene muchos círculos y líneas formando una especie de "cuadrícula curva". Llamaremos *araña* a este círculo de acrílico, y al terciado bajo la araña lo llamaremos *tímpano*.



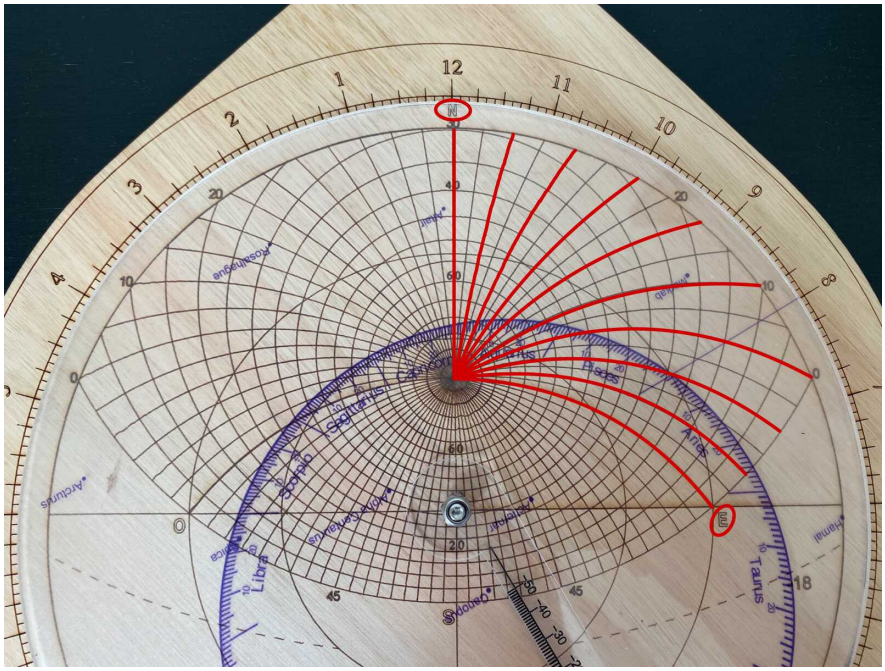


Tenemos que comprender ambas piezas, puesto que son el corazón del instrumento. La araña es la parte del astrolabio que condensa la información del cielo, gracias a las estrellas individuales que tiene marcadas y al círculo descentrado que representa las posiciones del Sol. El tímpano es la parte del astrolabio que condensa la información de la Tierra, puesto que los círculos y líneas que sobre él están dibujados son los círculos de altura y azimut, en este caso para la latitud de Concepción.

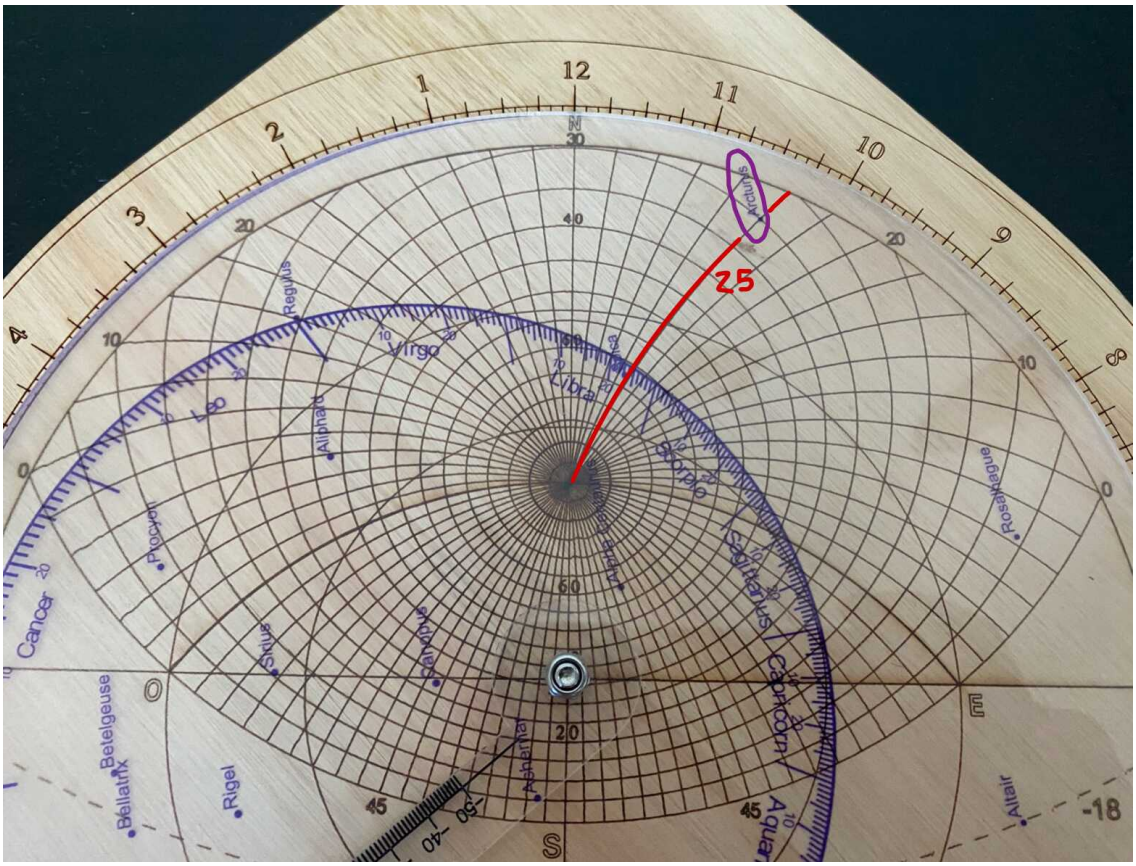
El astrolabio se utiliza girando la araña sobre el tímpano estático, ya que el giro de la primera emula el movimiento rotatorio de las estrellas y del Sol, observado desde un planeta Tierra inmóvil.

Ya habiendo entendido estas generalidades podemos empezar a hacer cálculos concretos con este instrumento, revisando con él los ejemplos ya vistos en la sección anterior.

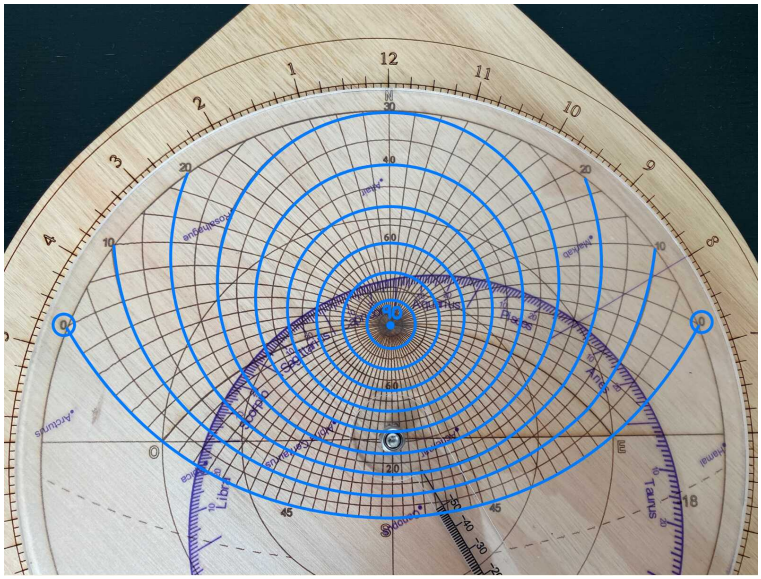
Lo primero que haremos será ubicar el zenit en el astrolabio, que es el punto ligeramente encima del centro real de este instrumento. Desde este punto especial emanan muchas curvas, que llamaremos "pelitos", donde cada uno de ellos representa un azimut, comenzando con el azimut de 0° en el Norte y avanzando de 5° en 5° a medida que giramos hacia el Este. A modo de ejemplo, la imagen a continuación muestra algunos pelitos de azimut entre 0° (Norte) y 90° (Este).



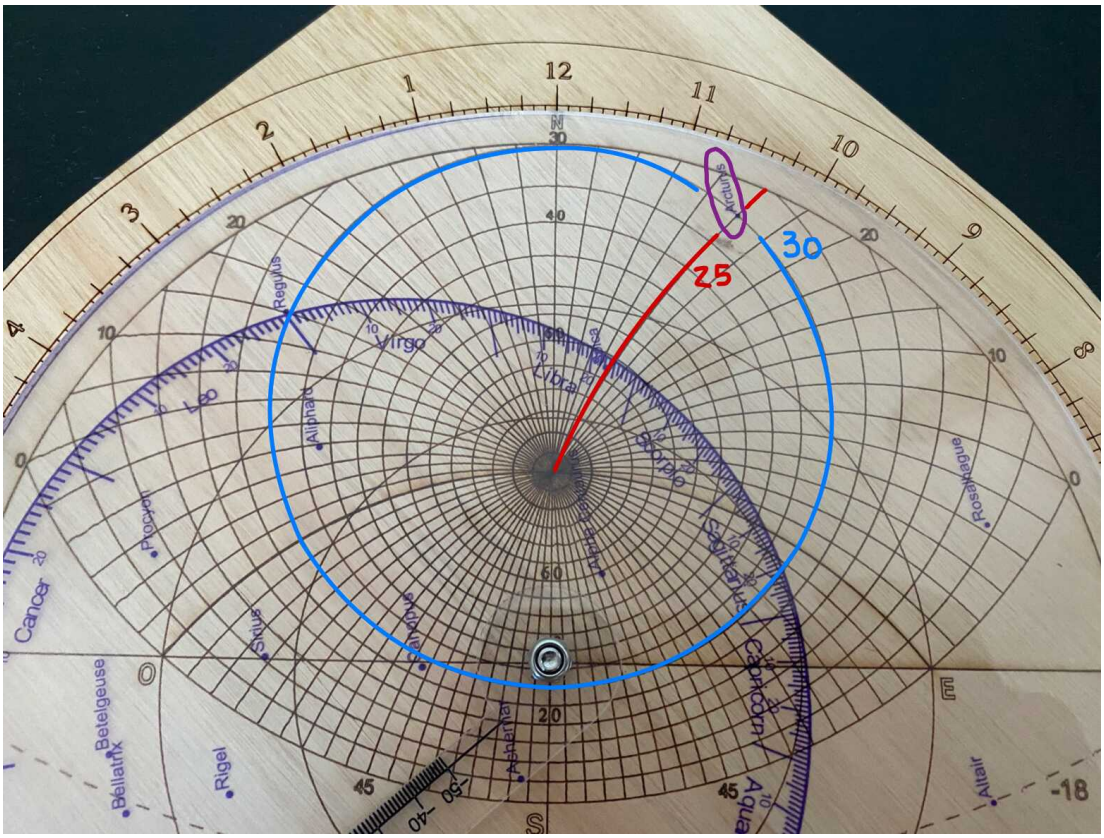
Como ya habíamos comentado, el azimut de *Arcturus* el día 10 de mayo a las 22:20 hrs es de 25°, por ello para ubicarla en el astrolabio debemos contar de 5° en 5° hasta encontrar el pelito de 25°, y encima de él ubicaremos el punto asociado a la mencionada estrella.



Las alturas, por su parte, son los círculos que "rodean" al zenit, yendo desde los 0° de altura que tiene el horizonte, subiendo de a 5° en 5°, hasta llegar al propio zenit, que es la altura de 90°. A modo de ejemplo, la imagen a continuación muestra algunos círculos de altura entre 0° (el horizonte) y 90° (el zenit).

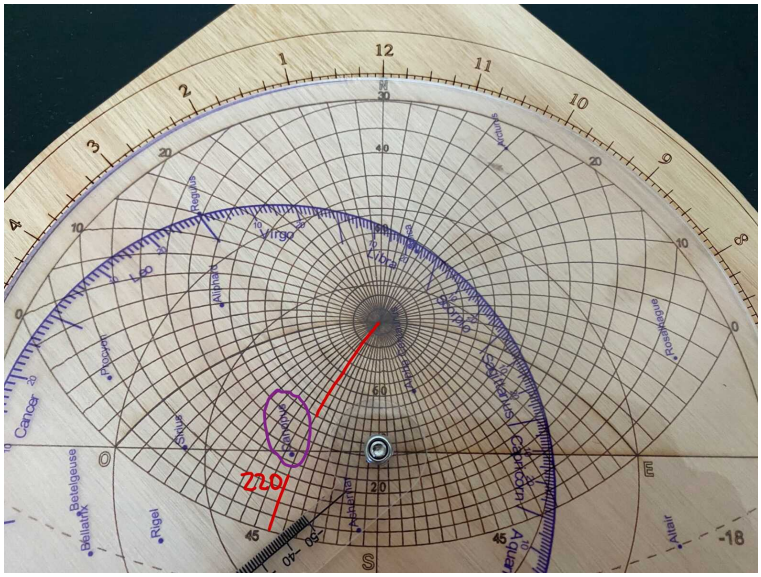


Siguiendo con el ejemplo anterior, comprobamos que *Arcturus* tiene una altura de 30°.

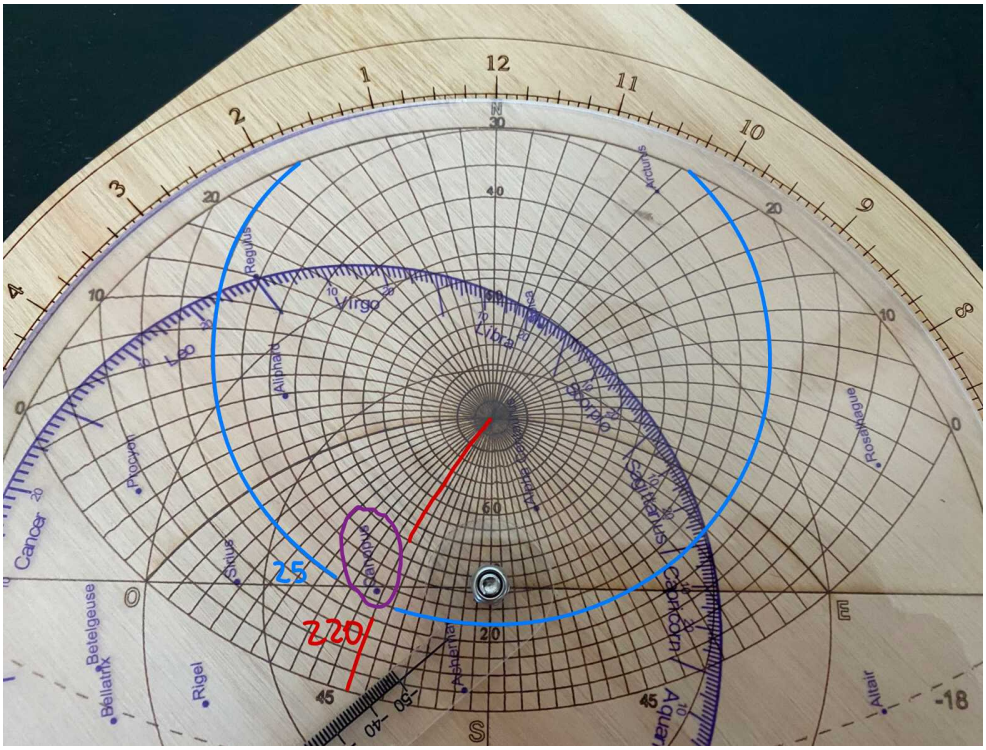


Si ahora dejáramos tal cual la configuración del cielo en ese momento, podríamos estudiar la ubicación de la estrella *Canopus* que habíamos también visto antes.

Observemos que su azimut está entre 220 y 225, y como está ligeramente más cerca del primero que del segundo, entonces podemos decir que el azimut buscado es de 222°.



Por otro lado, su altura está entre 25 y 30 grados, pero como es mínimamente más cercana a esta última entonces podemos decir que la altura de esta estrella es de 28°.



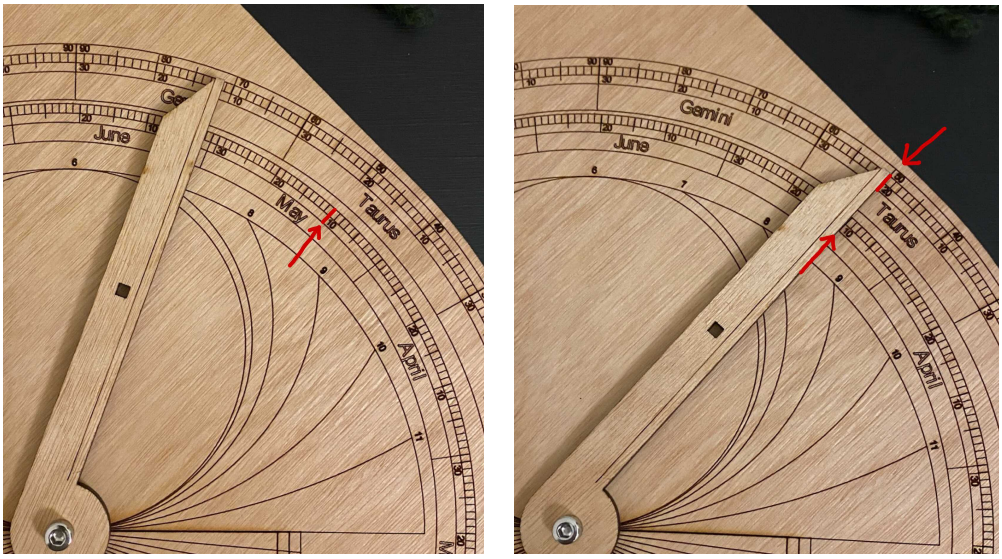
IV. Astrolabio y coordenadas del Sol

Ya hemos comprendido que el astrolabio nos permite determinar la posición precisa de un punto en el cielo mediante su azimut y su altura.

Si bien es interesante estudiar las estrellas una por una, lo verdaderamente sorprendente de esto es que, si nosotros fijamos la posición de una única estrella en el cielo, entonces inmediatamente podemos saber la posición de todas las demás estrellas sobre el horizonte. *Esto significa que una única estrella codifica la información de todo el cielo en ese momento.* Y según veremos a continuación, también podemos "decodificar" el cielo con la ayuda exclusiva del Sol. Por ello es que ahora pasaremos de estudiar las estrellas a estudiar el Sol[4].

Para ubicar el Sol en el astrolabio comenzaremos realizando mediciones con su *reverso*.

En primer lugar, recordemos que al inicio de esta actividad estudiamos el cielo el día 10 de mayo, ya que fue la gran inauguración del proyecto a nivel nacional. Buscaremos dicho día en el calendario situado en el reverso del astrolabio, y pondremos sobre él la cara interna de la regla giratoria, regla que llamaremos *alidada*.



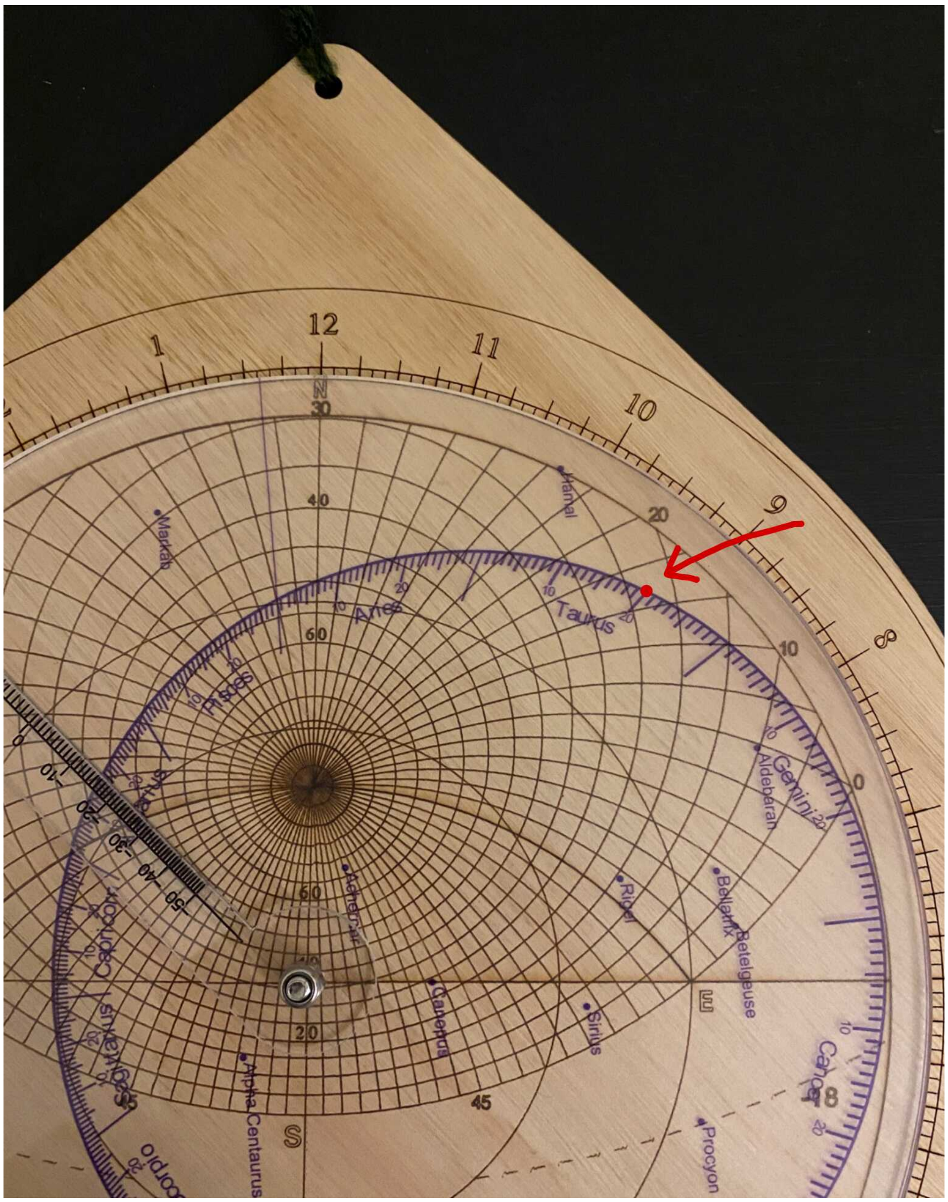
Dicha alidada marca un único signo zodiacal en el reverso del astrolabio, que en este caso es Tauro. Pero no solamente nos dice el signo, sino que también nos dice el número de dicho signo, que en este caso es Tauro 20 (ver la imagen anterior). Con esto podemos concluir que para estudiar el día 10 de mayo en el astrolabio debemos estudiar Tauro 20.

[4] Hacemos la distinción entre "estrellas" y "Sol" porque antiguamente el Sol no era considerado una estrella, ya que estas últimas se mueven todas de manera conjunta y armoniosa en el cielo, mientras que el Sol se desvía de dicho movimiento coordinado con el paso del año. Todo esto lo estudiaremos en detalle en la actividad 3.

En segundo lugar, volveremos al tímpano de nuestro astrolabio para ubicar el punto Tauro 20 en el círculo descentrado de la araña, el cual llamaremos *eclíptica*. Aquí es fundamental comprender lo siguiente:

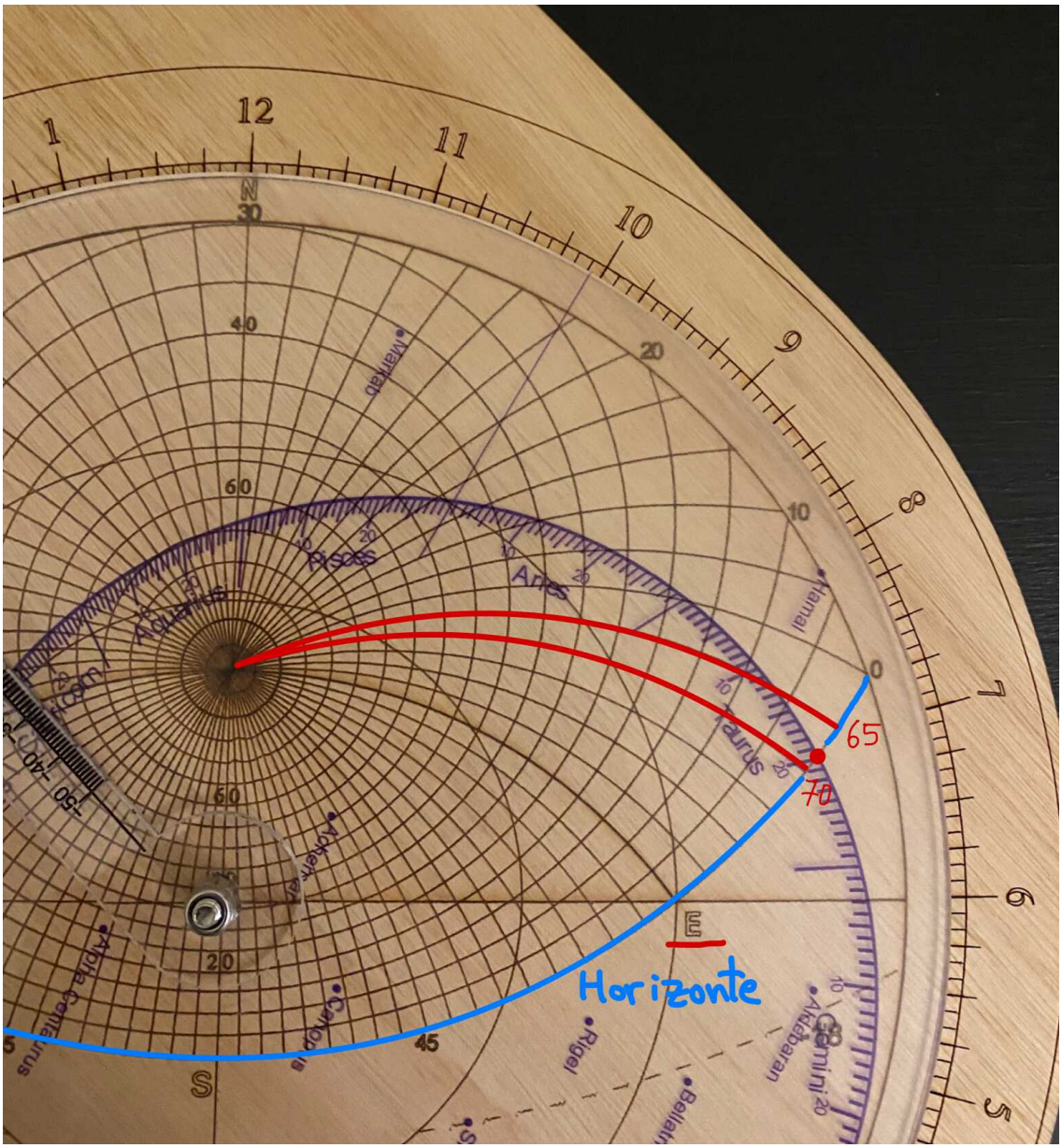
Todas las estrellas tienen una ubicación única en la araña, que es precisamente el puntito que lleva su nombre, pero el Sol tiene 365 posibles posiciones en ella, dependiendo del día del año que queramos estudiar. El círculo de la eclíptica reúne esas 365 posibilidades.

En nuestro caso, que es el día 10 de mayo, el punto asociado es Tauro 20[5].



[5] En las imágenes de este libro siempre marcaremos el día estudiado en el tímpano con un pequeño punto rojo sobre la eclíptica, el cual no podemos hacer muy grande para no generar ambigüedad sobre cuál es el día estudiado. En el astrolabio real no haga ninguna marca, solamente memorice el punto y vea cómo se mueve, sin rayar nada.

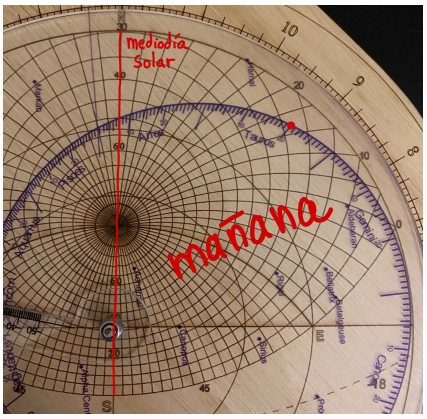
Para comprender cómo se mueve el Sol en el astrolabio dicho día podemos estudiar, por ejemplo, por cuál lugar del horizonte sale el Sol esa mañana. Para ello giramos la araña hasta que ubicamos el punto Tauro 20 sobre el horizonte, *pero cercano al Este*, y ahí podemos medir su azimut de salida. En este caso obtenemos un valor entre 65 y 70, pero ligeramente más cercano a 70, por lo que podemos establecer que el azimut buscado es de 68°. Por eso las coordenadas del Sol en su salida son azimut 68° y altura 0°.

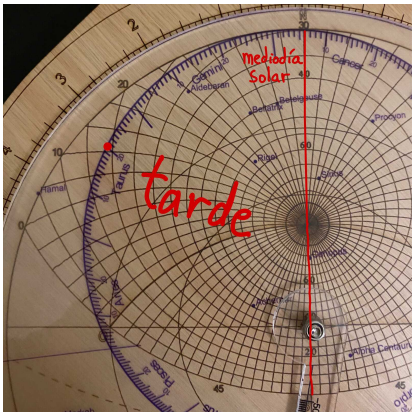


Como ahora pasaremos a estudiar el movimiento del Sol durante todo este día, es importante aclarar que el de giro de la araña, el cual arrastra a todas las estrellas y al Sol, debe ser en sentido opuesto a las manecillas del reloj, o sentido antihorario.

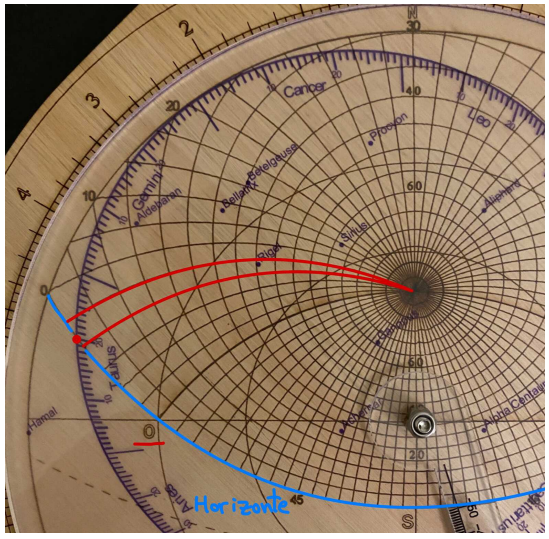
Teniendo esto en cuenta podemos ver cómo el Sol del día 10 de mayo, representado en el punto Tauro 20, va viajando por el cielo. Primero surgirá por el horizonte desde el lado derecho del astrolabio, para luego, con el paso de las horas, cruzar al lado izquierdo, escondiéndose bajo el horizonte cerca del Oeste. El punto medio de este viaje es el llamado *mediodía solar*, y sucede precisamente cuando el Sol atraviesa la línea vertical que divide el astrolabio por la mitad.

Por ello, si el Sol está sobre el horizonte y en la parte derecha del astrolabio, estamos en la mañana de dicho día, mientras que si está en la parte izquierda será la tarde. Las imágenes abajo muestran lo sucedido para el día 10 de mayo (Tauro 20).





Para calcular en qué lugar se pone el Sol el día 10 de mayo lo que haremos es poner el punto Tauro 20 sobre el horizonte, pero esta vez cercano al Oeste, y ahí medimos su azimut (ver imagen a continuación). En este caso obtenemos los mismos 68°, pero medidos en sentido Norte-Oeste. Aunque el azimut real sea de 360° - 68° = 292°, podemos pensar esos 68° medidos en sentido reloj como si fuera un azimut de -68° (entendiendo un azimut positivo cuando giramos de Norte a Este, y negativo cuando giramos de Norte a Oeste).

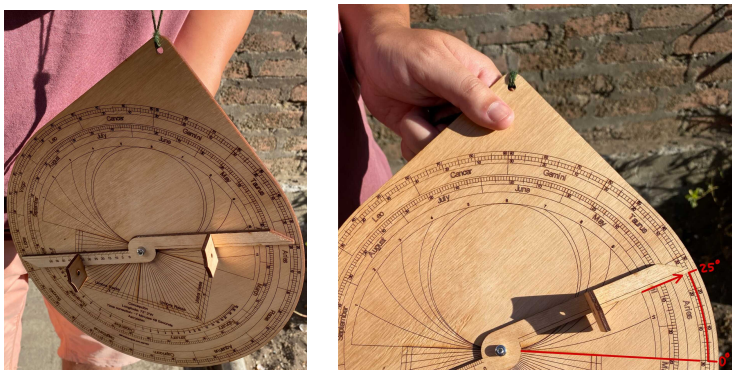


V. Midiendo la altura del Sol

Ahora veremos cómo calcular las coordenadas del Sol (y de todo el cielo en ese momento) midiendo directamente su altura sobre el horizonte, gracias al reverso del astrolabio.

Lo primero que hacemos es buscar un sitio con luz solar directa, donde colgaremos nuestro instrumento por su cuerdita para que quede completamente vertical (ver imagen abajo izquierda). Nuestro objetivo será que las *pínulas*, que son las mirillas acopladas a la alidada en el reverso del astrolabio, queden ambas perfectamente alineadas con el Sol[6]. Para ello lo que haremos, siempre con el astrolabio colgando, es acomodar el instrumento y su alidada de tal manera que la luz del Sol ingrese por el hoyito de la pínula superior, y simultáneamente pase de manera exacta por el hoyito de la pínula inferior. La imagen abajo a la derecha es un ejemplo de lo que no debiera ocurrir.

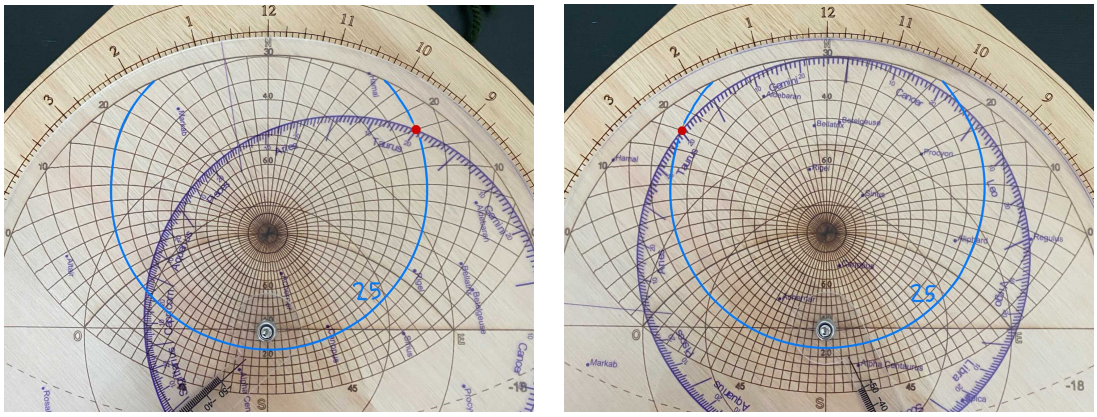
Si lo hiciéramos correctamente, debiera resultar lo indicado en la imagen de abajo a la izquierda. Y cuando ya lo hayamos logrado, nos olvidamos de la verticalidad del instrumento y vemos el ángulo que indica la cara interna de la alidada con respecto a la línea horizontal del reverso del astrolabio, con lo cual tendremos la altura del Sol en ese momento. En el caso específico del día 10 de mayo a las 10:15 hrs[7] obtendremos que la altura del Sol es de 25°, como bien podemos ver en la imagen abajo a la derecha.



[6] Las mediciones las realizamos mirando las pínulas, porque nunca, por ningún motivo, hay que mirar el Sol directamente.

[7] Consideramos una hora por la mañana porque en lo estudiado anteriormente para las estrellas era todo de noche, y ahí claramente el Sol no está sobre el horizonte para medir su altura.

Con este dato vamos al frente del astrolabio y movemos la araña de tal manera que Tauro 20 quede encima del círculo de altura de 25°. Curiosamente, la forma de conseguir que el Sol quede sobre dicha altura no es única, ya que hay 2 posibilidades.



Lo que sucede es que en la primera de estas configuraciones estamos en la mañana del 10 de mayo, cuando el Sol está subiendo en el cielo, mientras que en la segunda configuración estamos en la tarde de dicho día, con el Sol bajando. En el primer caso el Sol tiene una altura de 25° y un azimut de 40°, mientras que en el segundo caso el Sol tendrá la misma altura, pero su azimut será de -40°[8].

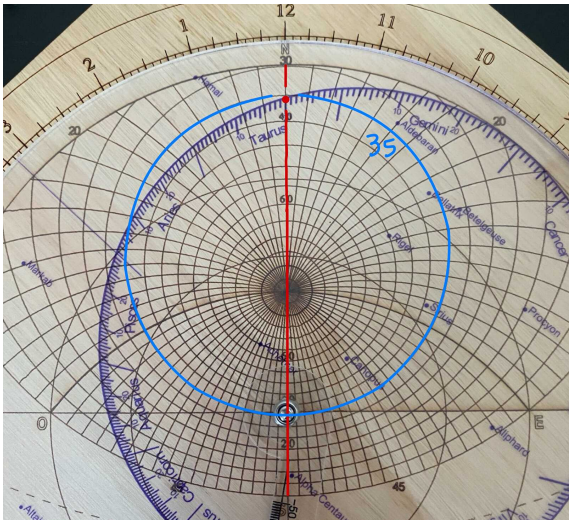
Para saber de manera inequívoca cuál de las dos configuraciones elegir, hay que solamente saber si estamos realizando esta medición o en la mañana o en la tarde, y así sabremos si ubicar el Sol a la derecha o a la izquierda del mediodía solar, respectivamente. El otro camino que uno puede hacer habiendo calculado la altura —el cual es solamente un poco más engorroso— es calcular directamente el azimut midiendo el ángulo entre el Norte y el Sol[9].

En nuestro caso sabemos que la configuración correcta es la de la izquierda, porque a las 10:15 hrs estamos en la mañana de dicho día.

Es conveniente insistir en que el Sol sale cerca del Este y se esconde cerca del Oeste. Por ello, todo el sector derecho del astrolabio representa su ascenso en el cielo, y el lado izquierdo representa su descenso, hasta desaparecer bajo el horizonte. Esto significa que el eje Norte-Sur, que es el eje vertical del astrolabio, define el momento en que nuestro astro deja de subir y comienza a bajar, por lo que representa el punto donde *el Sol alcanzará su altura máxima dicho día*. En este caso vemos que la altura máxima del Sol el día 10 de mayo es ligeramente mayor a 35°, por lo que podemos concluir que es de 36° grados, con su azimut asociado de 0°.

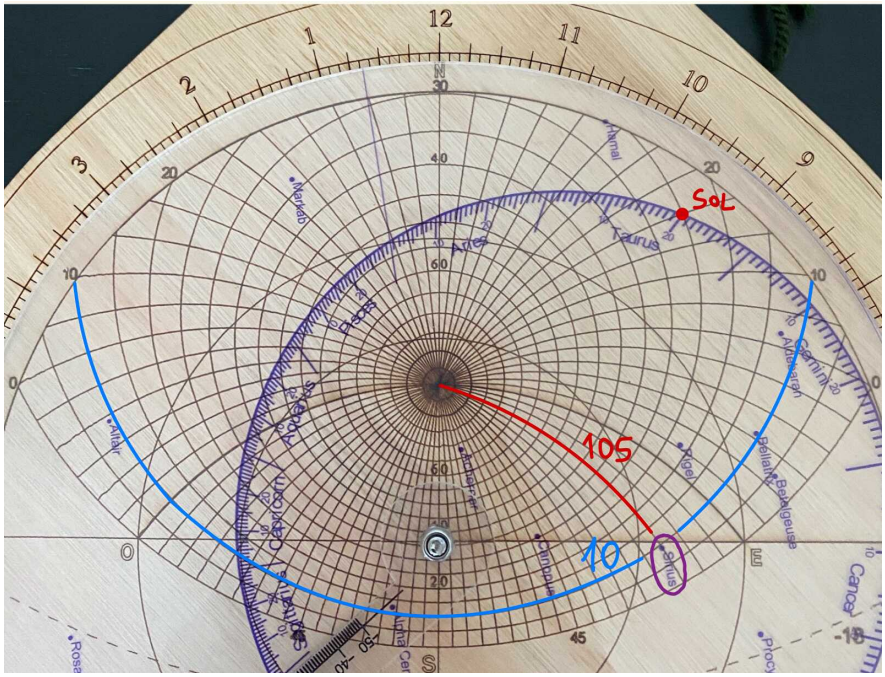
[8] Recordemos que un azimut es negativo cuando medimos desde el Norte girando hacia el *Oeste*.

[9] En una localidad específica del planeta, la dirección Norte es siempre la misma, por lo cual es suficiente con calcularla una sola vez, y no repetir su cálculo en cada medición con el astrolabio.



De esta manera, si hacemos la medición de altura temprano por la mañana o ya entrada la tarde, sabremos con certeza si para una altura dada nos corresponde la configuración de mañana o de tarde, con lo cual podemos saber con exactitud el azimut correcto en el momento de la medición.

Con sus dos coordenadas completamente determinadas fijaremos la configuración sobre el astrolabio, y, en consecuencia, podemos saber la posición de todas las estrellas del cielo, incluso aunque no podamos verlas (porque el propio brillo del Sol las vuelve invisibles). Por ejemplo, en ese mismo momento, que eran las 10:15 hrs del día 10 de mayo, la (invisible) estrella *Sirio* tiene una altura de 9° (ligeramente menor a 10°) y un azimut de 105°.



VI. Los crepúsculos y las partes del día

Es importante insistir en lo que acabamos de aprender con el astrolabio: podemos saber la posición del Sol y de todas las estrellas sobre el horizonte durante un día soleado (aunque las estrellas sean invisibles) mediante un simple cálculo con ayuda del Sol y la alidada.

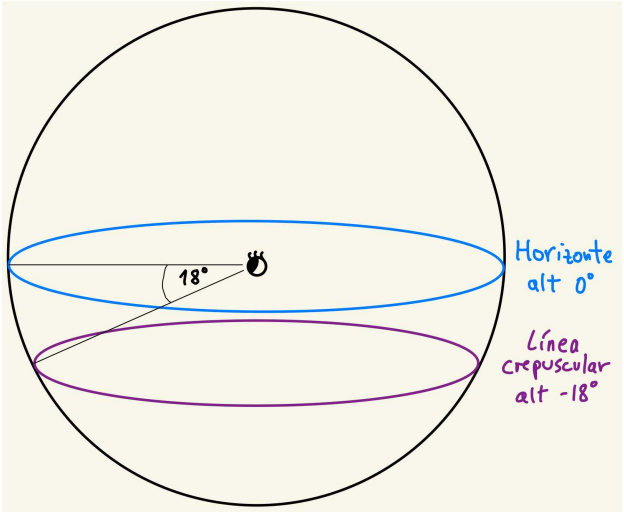
Lo interesante de todo esto es que el astrolabio no solamente nos permite hacer mediciones de día, mediante las coordenadas del Sol, sino que también podemos usar sus pínulas para medir la altura de las estrellas. Pero para que haya estrellas visibles en el cielo necesitamos, claramente, que el cielo esté oscuro, por lo tanto, ahora necesitamos entender el concepto fundamental que nos permite distinguir los tiempos de luminosidad y oscuridad durante el día: el *crepúsculo*.

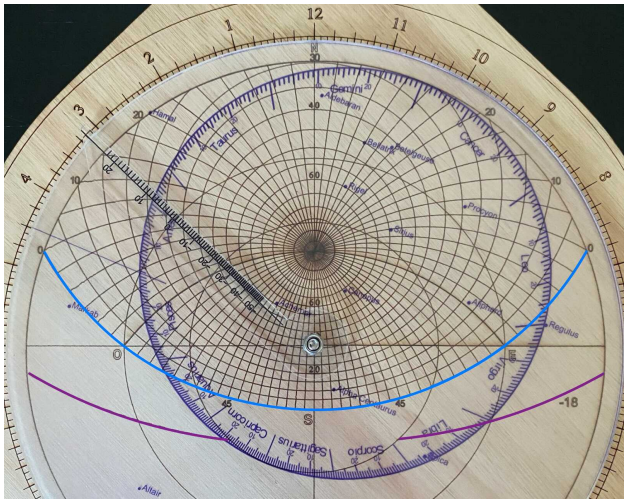
Pensemos un poco: cuando el Sol recién se esconde bajo el horizonte, ¿se oscurece el cielo inmediatamente? Es claro que no, porque hay un tramo del día en el cual el Sol sigue iluminando el cielo, a pesar de que no podamos verlo directamente (porque ya cruzó el horizonte). Luego de un rato dicho brillo irá desapareciendo, hasta el momento en que el cielo quede completamente oscuro. A todo este periodo entre que el Sol se esconde por el horizonte y que el cielo se oscurece completamente lo llamaremos *crepúsculo vespertino*. La imagen abajo muestra un crepúsculo vespertino en el Gran Concepción, con el Sol a -3° de altura.

Y por la mañana ocurre el mismo fenómeno, pero al revés: llamaremos *crepúsculo matutino* al intervalo desde que el cielo completamente oscuro de la noche se empieza a iluminar, hasta que el Sol cruza la línea del horizonte en su salida.

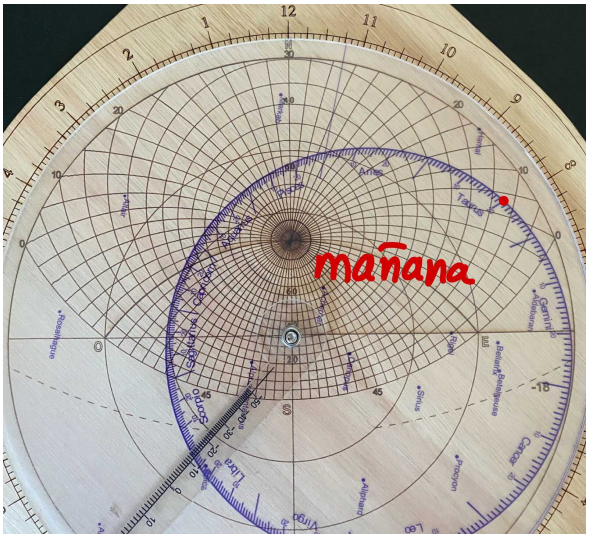
Si bien el inicio del crepúsculo vespertino es un evento astronómico matemáticamente preciso —que es cuando el Sol se esconde por el horizonte y su altura es 0°— existen varias convenciones sobre cuál es el momento del transcurso del día que debemos considerar como el inicio real de la oscuridad absoluta. Dado que estamos en un contexto astronómico, nos basaremos en el concepto de *crepúsculo astronómico*, el cual define que el cielo se oscurece completamente cuando el Sol ha alcanzado una altura de -18°. Y lo mismo para el crepúsculo matutino: es la altura de -18° la que el Sol debe cruzar para que el cielo pase de la oscuridad de la noche a la iluminación progresiva.

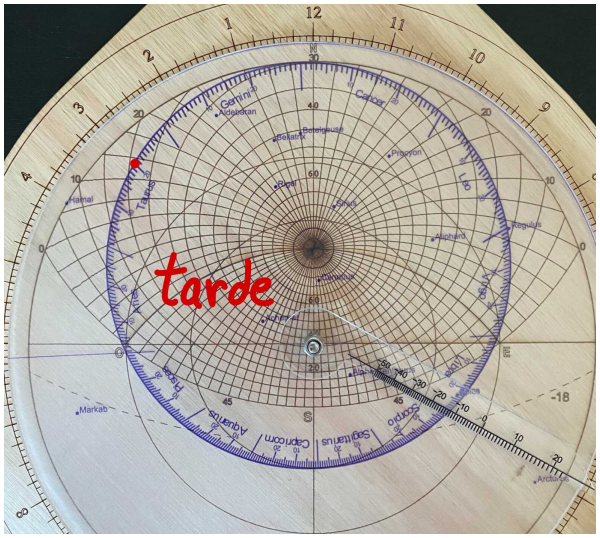
La línea que define los crepúsculos tanto en la cúpula del cielo como en el astrolabio queda clara con las siguientes imágenes (la línea morada que hemos marcado en el astrolabio esconde el hecho de que la línea crepuscular es punteada.).

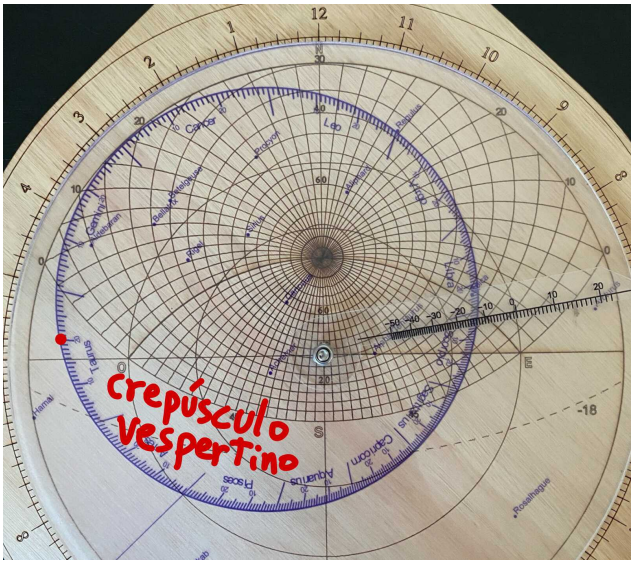


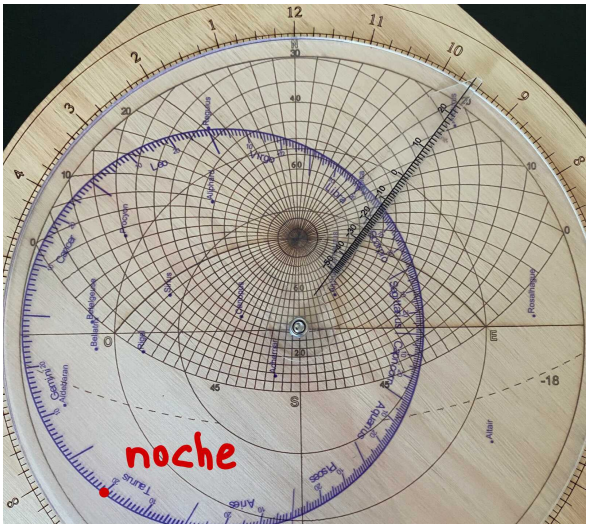


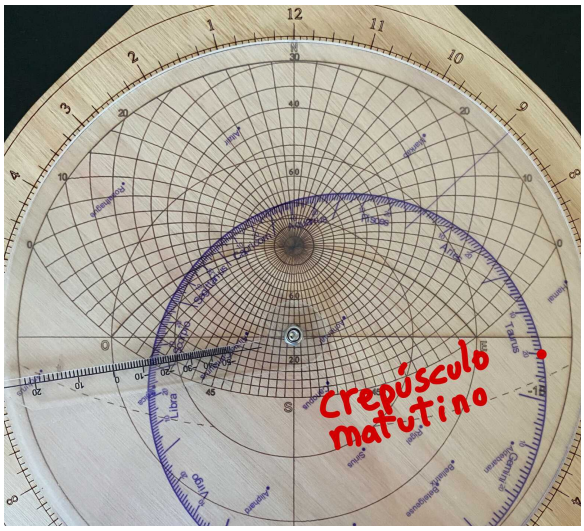
Con esto podemos separar un día cualquiera en cinco partes: mañana, tarde, crepúsculo vespertino, noche, crepúsculo matutino. Las siguientes cinco imágenes del astrolabio nos muestran estas cinco partes del día para el 10 de mayo.









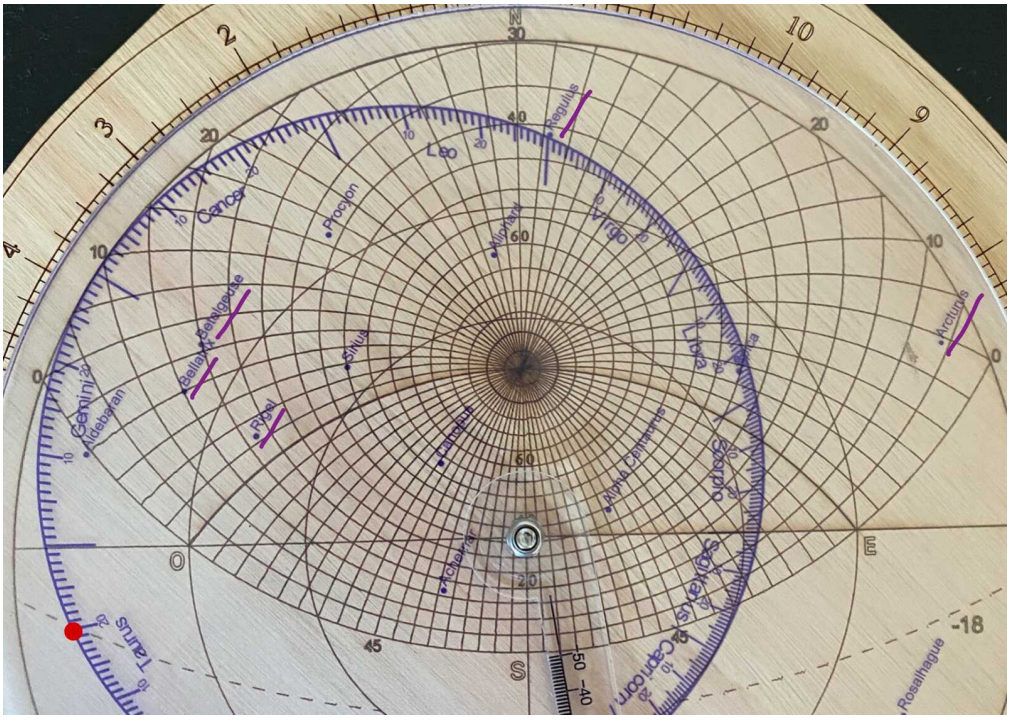


Nunca olvidemos que para emular el transcurso del día y la noche necesitamos que la araña gire en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Podemos resumir lo anterior en la siguiente tabla.

Momento del día	**¿Podemos ver el Sol?**	**¿Podemos ver todas las estrellas?**
Mañana	Sí	No
Tarde	Sí	No
Crepúsculo vespertino	No	No hay certeza
Noche	No	Sí
Crepúsculo matutino	No	No hay certeza

Para ir finalizando esta actividad estudiaremos el final del crepúsculo del día 10 de mayo, que es equivalente al inicio de la noche de dicho día, para así estar seguros de que podremos ver todas las estrellas notables del cielo sobre el horizonte.



En particular, podemos ver claramente las estrellas *Rigel*, *Betelgeuse* y *Bellatrix* de la constelación de *Orión*, aunque estén cerca de esconderse bajo el horizonte por el Oeste.

Por otro lado, podemos ver la estrella *Arcturus* que está empezando a surcar el cielo, con un azimut de 61° y altura de 6°.

Finalmente, observemos la estrella *Regulus* de la constelación de *Leo*: sus coordenadas horizontales son azimut = 6° y altura = 41°, y en unos pocos minutos alcanzará su altura máxima porque cruzará el eje Norte-Sur.

VII. Midiendo la altura de las estrellas

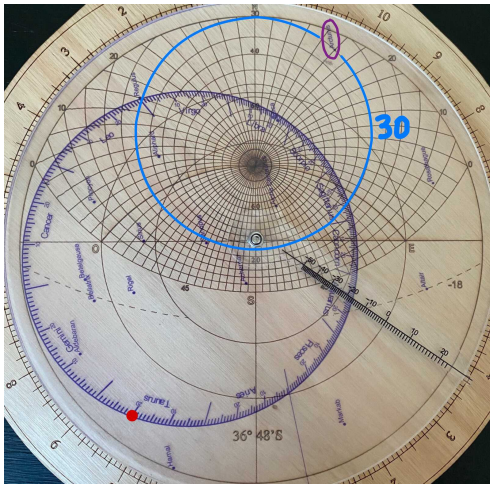
Volvamos ahora a estudiar las 22:20 hrs del día 10 de mayo, como hicimos al inicio de esta actividad, pero ahora el frente del astrolabio no será nuestro punto de partida, sino precisamente a lo que queremos llegar mediante mediciones directas del cielo.

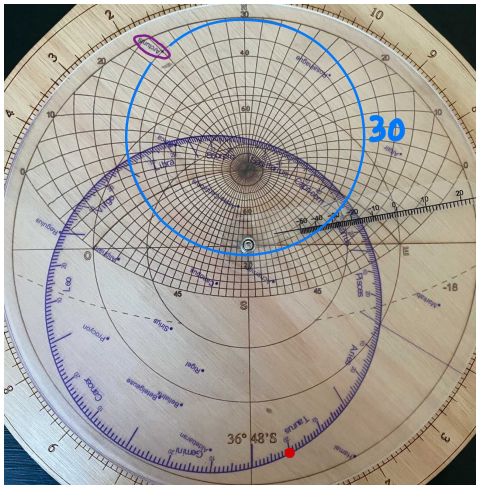
Efectivamente el cielo estará completamente oscuro ese día a esa hora, por lo que podremos medir la altura de cualquiera de las estrellas notables del cielo. Elijamos nuevamente la estrella *Arcturus*, y midamos su altura con el reverso del astrolabio.

Lo más natural sería inspirarnos en lo que hicimos con el Sol: tomamos el astrolabio por su cuerdita, lo levantamos de manera vertical y giramos la alidada de tal manera que la luz de *Arcturus* entre por una pínula y salga por la otra. Evidentemente esto es inviable porque la luz de las estrellas es muy tenue, y lo más triste es que ni siquiera podemos sumar al alineamiento nuestros ojos: la luz de *Arcturus* se difuminará por lo reducido del tamaño de los hoyitos de las pínulas.

Por ello, en vez de esperar que la tenue luz de las estrellas atraviese los hoyitos, utilizaremos las *puntas* de las mismas pínulas para conseguir el alineamiento deseado con el ojo. De esta manera debemos alinear la estrella con ambas puntas simultáneamente. Por esa razón es que las alidadas tienen forma de casita, para así poder contener simultáneamente un hoyito para mediciones con el Sol y también una punta para mediciones de las estrellas. Así podríamos determinar directamente que *Arcturus* tiene una altura de 30°.

Con esta información recabada con las pínulas podemos pasar al tímpano. Pero sucede que al ubicar dicha estrella sobre el astrolabio vemos que hay 2 posibles configuraciones del cielo, ¡y ambas suceden en la noche!





Es una situación similar a la que vimos con el Sol, pero en este caso no podemos utilizar la noción de "mañana" o "tarde" para saber cómo distinguir entre ambas configuraciones. Para resolver este problema es suficiente con saber el Norte, para así calcular el azimut de dicha estrella. De esta manera podemos saber cuál de las dos configuraciones es la correcta, y con ello saber cómo están ubicadas todas las demás estrellas en ese momento.

A modo de resumen, ya hemos comprendido dos cosas fundamentales: sabemos cómo determinar la configuración del cielo cuando el Sol está encima del horizonte (mediante la medición directa de su altura, y quizás de su azimut), así como también sabemos hacerlo de noche (mediante las coordenadas de alguna estrella destacada). Solamente nos quedaría investigar: ¿cómo podemos hacer cálculos con el astrolabio en medio de un crepúsculo?

La respuesta es muy simple: como en esos momentos no hay ni Sol ni estrellas en el cielo, no hay medición directa e infalible que podamos realizar, y por ello es suficiente con esperar a que se oscurezca (en caso del crepúsculo vespertino) o que amanezca (en caso del crepúsculo matutino). Ahí podremos tener al Sol o a las estrellas para que nos ayuden. Por lo general la duración de los crepúsculos es pequeña[10], por lo que la respuesta a la pregunta anterior es un asunto más de paciencia que de matemática.

Con esto hemos terminado la actividad 1.

[10] El desafío 6 a continuación trata sobre cuánto duran los crepúsculos.

Desafíos*

Los siguientes desafíos son opcionales dentro de la actividad original del proyecto, y pueden ser propuestos siempre que sobre tiempo o el grupo de participantes esté en un contexto (como un taller de astronomía, por ejemplo) donde cuenten con el tiempo para reflexionarlos. Recuerde que las respuestas que usted obtenga dependerán de la latitud en la que realice los cálculos. Para resolver estos desafíos en una latitud distinta a las abordadas en el proyecto, vaya al primer capítulo de la la Parte II de este libro, en el cual podrá ver cómo conseguir un astrolabio para su latitud.

Desafío 1. Determine todos los días del año de tal manera que en su latitud la estrella *Sirio* tenga una altura de 20° a medianoche.

Desafío 2. El *orto helíaco* de una estrella es el primer día en el cual podemos ver por un momento dicha estrella salir, justo antes de que el Sol la oculte con su brillo. Determine el orto helíaco de Sirio para su latitud.

Los siguientes desafíos requieren el uso de la regla, por ello es conveniente aclarar que para calcular el intervalo de tiempo en que un objeto del cielo realice cierto movimiento, basta con poner el borde interno de la regla sobre él y ver la *hora solar* en el borde externo del tímpano en ambos casos. La diferencia de horas dará la longitud del intervalo de tiempo.

Desafío 3. Determinar cuánto tiempo transcurre en el día 10 de julio desde la salida del Sol hasta que éste alcanza una altura de 15°.

Desafío 4. Determine cuánto dura el día 10 de mayo, es decir, desde que el Sol sale hasta que se pone.

Desafío 5. Determine todos los días del año que tienen exactamente 10 horas de Sol.

Desafío 6. Considerando un plano cartesiano cuyo eje X sean los días del año, y cuyo el eje Y sea la duración del crepúsculo, construya la gráfica asociada a su latitud de la duración de los crepúsculos marcando puntos cada medio mes, y comenzando desde el 21 de diciembre (solsticio de verano).

Sugerencias para realizar la actividad

La primera actividad de este proyecto tiene las siguientes 4 partes, cuyas descripciones y tiempos ideales son los siguientes:

1. Primero recibiremos a los profesores y sus estudiantes en la sala donde realizaremos la actividad, donde firmarán la lista, entregarán los anexos de todos sus estudiantes y les entregaremos las libretas y los marcapáginas del proyecto. Adicionalmente les pediremos a cada estudiante y a cada profesor que responda la hoja del test de entrada con 16 breves preguntas, mientras esperan el inicio de la actividad. No responderemos preguntas en relación al test de entrada, y hay que insistir en que no deben usar el teléfono para encontrar las respuestas, ya que esto no es evaluado. Finalmente les pediremos a los estudiantes que vayan al grupo que le hemos asignado de manera aleatoria, viendo en la imagen proyectada en el telón a cuál grupo deben ir. Los profesores irán a un único grupo común. Todo esto debiera transcurrir entre que los grupos llegan hasta como mucho 10 minutos después de la hora oficial de citación.

2. Ya con todos los estudiantes y profesores sentados en sus grupos asignados, entregaremos 1 astrolabio por grupo, para así realizar la introducción al proyecto mediante el PPT oficial, donde les mostramos los objetivos que buscamos como *Geómetras del Cielo*. Les explicaremos de qué tratarán las 5 actividades y cómo resultaron el año pasado. Al final de esta introducción todas las personas en la sala deben de haber entregado resuelta su hoja del test de entrada. Esta introducción debiera durar como mucho 15 minutos.

3. Inmediatamente después de terminar la introducción y de asegurarnos de que todos hayan entregado su hoja con el test de entrada resuelta, empezará la actividad del astrolabio con el apoyo del PPT oficial (distinto al de la introducción), cuya duración ideal será de 1 hora y 30 minutos. En esta parte cada uno de los 2 monitores tendrá 2 grupos asignados, con los cuales resolverán algunos cálculos en conjunto, y a los cuales guiará en caso de ver perdidos y motivará en caso de que estén disociando. Habrá un par de pausas intermedias para que los estudiantes y profesores puedan reposar su mente.

4. Luego de terminada la actividad entregaremos el test de salida a cada profesor y a cada estudiante, que por tener 4 breves preguntas debieran resolver en como mucho 10 minutos. Finalmente, les pediremos a todos los participantes que nos esperen a la salida para tomarnos una foto en conjunto, después de lo cual damos la actividad por terminada.

En resumen, considerando los posibles retrasos y las pausas intermedias, la actividad completa está pensada para ser realizada en como mucho 2 horas y 15 minutos. El horario ideal para realizar esta actividad (y todas las demás, de hecho) es entre las 10:00 y las 12:15 hrs, durante cualquier día entre lunes y jueves.

Ahora pasaremos a detallar cuáles son los puntos que debemos tocar sí o sí en la actividad del astrolabio, enmarcada en el punto 3 de la página anterior.

En primer lugar, la actividad contiene muchos cálculos mediante el uso del astrolabio, y si les entregamos un ejemplar a cada grupo es para que vayan ellos mismos comprobando lo comentado por el profesor encargado usando el propio instrumento que tienen en sus manos. Debemos motivar a los estudiantes a que, mediante el apoyo de los monitores, repliquen lo que les estamos contando, y que no solamente escuchen y miren, sino que también usen el *tacto*.

Dentro de los cálculos que realizamos en esta actividad, hay algunos que el profesor los explicará solo, mientras que para otros ejemplos el profesor requerirá de la participación e intervención de los participantes de la actividad y sus monitores asignados. Si no mencionamos algún ejemplo a continuación es porque el profesor debe trabajarlo solito, "unidireccionalmente", de manera pausada y clara, para que los ejemplos posteriores trabajados con los participantes y los monitores fluyan de la mejor manera posible. Esto último no quita que si algún participante quiere intervenir, puede hacerlo perfectamente.

Sección I. Introducción

Es importante aclarar que comprender la cúpula celeste es un requisito para comprender de manera adecuada el astrolabio.

Sección II. La cúpula del cielo

Sugiero que cuando hablemos de el azimut movamos los bracitos en sentido horizontal, mientras que si hablamos de la altura los movamos en sentido vertical, ya que así los participantes interiorizan el movimiento para ambas coordenadas. Esto va ligado a los ejemplos iniciales de azimut 45° y altura 60°[11].

Mencionar que la altura es una medida angular, no una altura de longitud. La idea es evitar que piensen que la altura de una estrella sea la distancia de la Tierra a dicha estrella (pensando qué tan "alto" está), o su tamaño (pensando en la altura como "estatura").

[11] En todos los territorios donde hagamos esta actividad utilizaremos estos 2 ejemplos iniciales, pero luego habrán otros en los cuales los valores cambiarán. Todo ello está explicado al final de esta sección de sugerencias.

Posterior a que el profesor encargado haya visto los ejemplos de *Arcturus* y *Alpha Centaurus*, los monitores deben encargarse de que los miembros de sus grupos entiendan cómo ubicar *Canopus* en la cúpula celeste.

Que los participantes verbalicen cómo determinar la posición de un punto en la cúpula para cada uno de los ejemplos "sin estrella específica". Nosotros entregaremos progresivamente las siguientes coordenadas: (70°,40°), (120°,0°), (0°,45°), (250°,80°), (90°,-30°), y ellos dirán como ubicar el punto en la cúpula para así ir pasando al siguiente. Cada ejemplo debiera ser trabajado de manera breve, articulando ojalá con los brazos los movimientos horizontales para los azimut y los verticales para las alturas en cada caso.

Preguntar a los estudiantes si han visto o no "el plano cartesiano" en sus clases de matemática. Es importante transmitir la idea de que el plano cartesiano que ven en el colegio sirve para representar un espacio plano, pero que también es posible hablar de ejes coordenados sobre una esfera. De esa manera podrán apreciar este concepto escolar desde una perspectiva más amplia. No estaría mal mencionar que si alguien siguiese una carrera científica, entonces tendrá que ver coordenadas esféricas en un curso llamado "Cálculo multivariable", que por lo general cuesta mucho entender a menos que uno haya visto estos instrumentos antes :) Ya dicho esto haremos una pausa de 5 minutos antes de empezar la próxima sección, para que los estudiantes puedan procesar lo ya visto e interactuar con los integrantes de sus grupos.

Sección III. Astrolabio y coordenadas de estrellas

Luego de que el profesor encargado haya visto el ejemplo de las coordenadas de *Arcturus* en el astrolabio, que los participantes determinen junto a su monitor encargado las coordenadas de *Canopus* (azimut 222° y altura 28°).

Sección IV. Astrolabio y coordenadas del Sol

Para ver si comprendieron la transformación de días a signo zodiacal, preguntarles a qué signo corresponde el día 1 de junio (Gemini 11).

Insistir en que para el cálculo de la altura del Sol nunca hay que mirar el astro directamente, bajo ninguna circunstancia, sino que solamente deben mirar las pínulas y sus sombras.

Sección V. Midiendo la altura del Sol

Cuando hayamos visto la configuración en el astrolabio para el día 10 de mayo (Tauro 20) con el Sol a altura 25° por la mañana, que sean los participantes los que calculen las coordenadas de la "invisible" estrella *Sirio*. Al terminar este ejemplo haremos una pausa de 5 minutos.

Sección VI. Los crepúsculos y las partes del día

Preguntarles a los participantes si cuando el Sol se esconde entonces el cielo se oscurece inmediatamente, para así convenir que aquí trabajaremos con el concepto de *crepúsculo* (así evitamos las posibles ambigüedades derivadas de las palabras *atardecer, ocaso,* etc...).

En el ejemplo del fin del crepúsculo vespertino e inicio de la noche para el día 10 de mayo (Tauro 20 sobre la línea crepuscular) pedirle a los participantes que indiquen las coordenadas de *Arcturus* y de *Regulus* a medida que vamos hablando de estas estrellas.

Sección VII. Midiendo la altura de las estrellas

Esta parte la podemos omitir si es que estamos cortos de tiempo, pero sin dejar de mencionar que el astrolabio es un instrumento que sirve para hacer mediciones precisas *tanto de día como de noche*.

Otras sedes

Hay una última cosa importante a tener en cuenta: toda esta actividad fue pensada para ser realizada con astrolabios que funcionan en la latitud de Concepción. Por ello es que a continuación mostramos todos los valores que debieran ser trabajados en cada uno de los territorios, para cada sección de la actividad.

Sección		**Concepción**	**Valdivia**	**Puerto Montt**	**Santiago**
II	*Arcturus* 10 mayo	22:20 hrs az=25, alt=30	23:00 hrs az=15, alt=30	21:20 hrs az=40, alt=20	21:35 hrs az=35, alt=30
II	*Alpha C.* 10 mayo	22:20 hrs az=150, alt=59	23:00 hrs az=153, alt=66	21:20 hrs az=142, alt=56	21:35 hrs az=151, alt=53
II	*Canopus* 10 mayo	22:20 hrs az=222, alt=28	23:00 hrs az=220, alt=25	21:20 hrs az=230, alt=39	21:35 hrs az=224, alt=28
III	*Arcturus* 10 mayo	22:20 hrs az=25, alt=30	23:00 hrs az=15, alt=30	21:20 hrs az=40, alt=20	21:35 hrs az=34, alt=30
III	*Canopus* 10 mayo	22:20 hrs az=222, alt=26	23:00 hrs az=220, alt=23	21:20 hrs az=230, alt=39	21:35 hrs az=223, alt=28
IV	Sol 10 mayo salida y puesta	68,-68	67,-67	67,-67	69,-69
V	Hora Sol 10 mayo 25° alt	10:15 hrs	10:40 hrs	10:45 hrs	09:50 hrs
V	Az. Sol 10 mayo 25° alt	40	34	33	44
V	Alt. max. Sol 10 mayo	36	33	32	39
V	*Sirius* 10 mayo Sol 25° alt	10:15 hrs az=105, alt=9	10:40 hrs az=101, alt=14	10:45 hrs az=101, alt=14	09:50 hrs az=107, alt=6
VI	Ej. crepusc. *Orión*	Casi poniéndose	Casi poniéndose	Casi poniéndose	Casi poniéndose
VI	Ej. crepusc. *Arcturus*	az=61, alt=6	az=59,alt=5	az=61,alt=4	az=61,alt=8
VI	Ej. crepusc. *Regulus*	az=6, alt=41	az=7,alt=38	az=7,alt=37	az=6,alt=45
VII	*Arcturus* 10 mayo	22:20 hrs, alt=30	23:00 hrs, alt=30	21:20 hrs, alt=20	21:35 hrs, alt=30

Capítulo 2: La esfera armilar

Palabras clave. *Esfera rotatoria, montura del horizonte, universo esférico, eclíptica, horizonte, cúpula del cielo, observador, meridiano, latitud, astrolabio, margen de error, tridimensionalidad, bidimensionalidad, azimut de salida, azimut de puesta, altura máxima, diagrama maestro, solsticios y equinoccios, Sol de medianoche, hemisferio norte.*

Contenido de la actividad

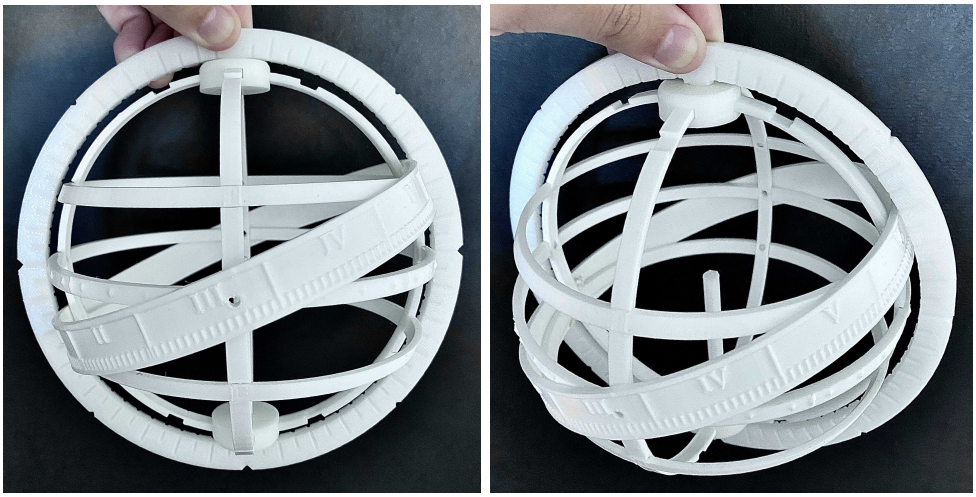
I. Introducción

En esta actividad estudiaremos cómo el instrumento científico llamado *esfera armilar* nos permite estudiar la trayectoria del Sol en el cielo. En primer lugar mostraremos las partes de la esfera armilar, para luego pasar a estudiar el movimiento del Sol en Concepción. Luego estudiaremos qué sucede en otras latitudes, como por ejemplo cerca del polo o en el hemisferio norte. Finalmente, veremos las ventajas y desventajas tanto de la esfera armilar como del astrolabio.

II. Partes de la esfera armilar

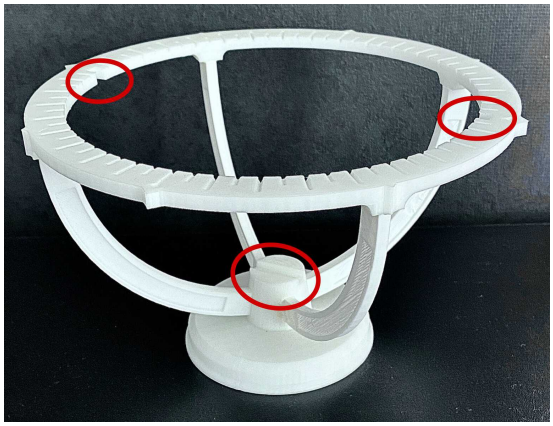
Una esfera armilar es un objeto compuesto de 2 grandes partes: la esfera rotatoria y la montura del horizonte. Veremos a continuación de qué trata cada una.

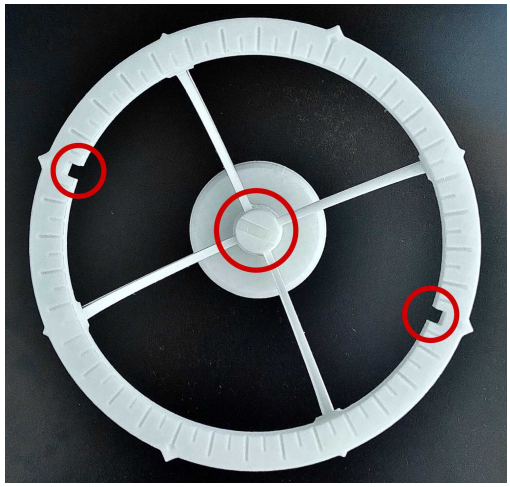
1. La esfera rotatoria. Esta estructura redonda está hecha de 11 piezas de plástico, y representa un universo esférico desde el punto de vista de los astrónomos de la antigüedad, previos al año 1500. Su giro nos va a permitir estudiar cómo se mueve el Sol en el cielo.



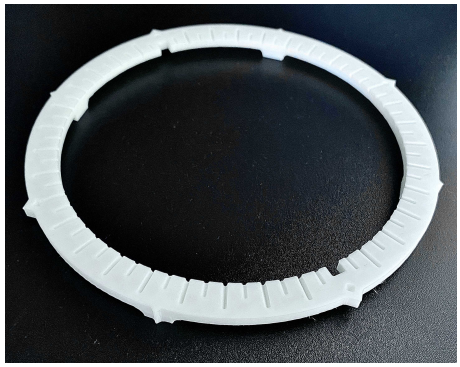
La parte de la esfera rotatoria que más nos interesa para esta actividad es la eclíptica, que es aquella franja que contiene los 12 meses del año en números romanos (I para enero, II para febrero, III para marzo, etc.). Ubicando adecuadamente el Sol sobre esta pieza es como podremos estudiar el movimiento de este astro en cualquier momento del año. La distancia temporal entre una marca y la siguiente es de 2 días (ver imagen en la página siguiente).

2. La montura del horizonte. Esta estructura, conformada por 6 piezas de plástico, es la montura sobre la cual va posada la esfera rotatoria anterior. Representa el horizonte asociado al observador en un determinado lugar del planeta, la cual debe estar armada de tal manera que las 3 aberturas en la imagen a la derecha queden alineadas.



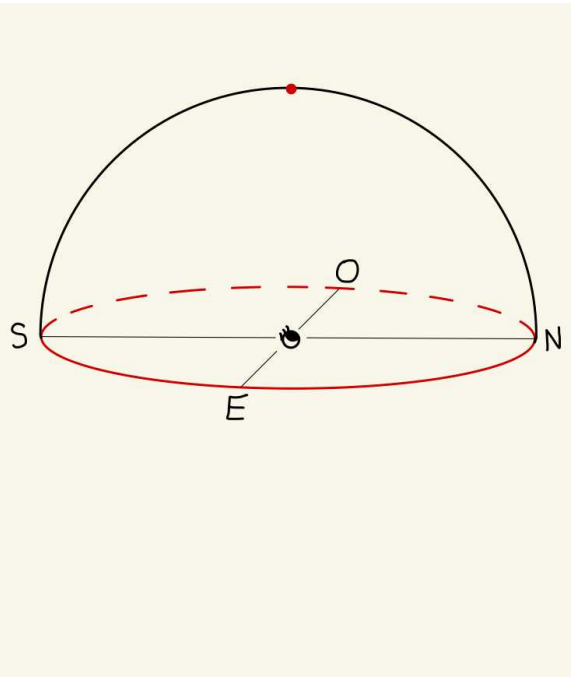


La parte de la montura del horizonte que más nos interesa para esta actividad es el propio horizonte, que es la pieza circular sobre la que reposa la esfera rotatoria. Esta pieza contiene unas puntitas para representar los 4 puntos cardinales (Norte, Sur, Este, Oeste), donde las aberturas indicarán el Norte y el Sur. Adicionalmente contiene 4 puntitas más para las direcciones intermedias (NorEste, SurEste, SurOeste, NorOeste). En su totalidad esta pieza representa el horizonte de un observador en una determinada latitud.



La imagen a continuación muestra las 17 piezas de una esfera armilar completamente desarmada (arriba), y dos perspectivas diferentes de la misma esfera armilar ensamblada (abajo).

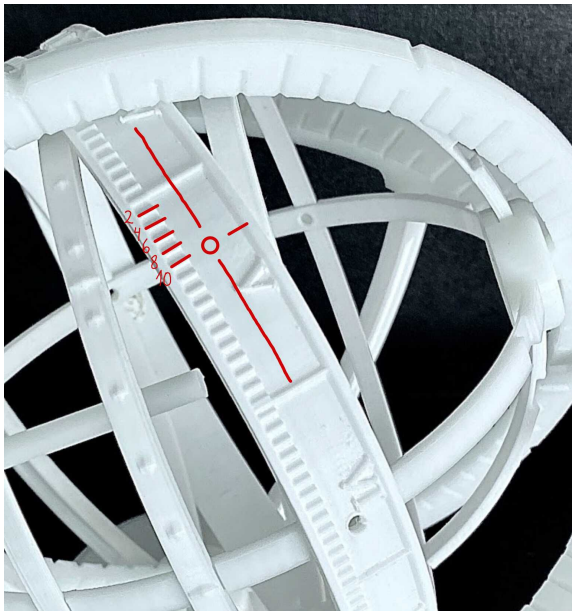
Si montamos la esfera rotatoria sobre el horizonte obtenemos la cúpula del cielo de la que ya hemos hablado en la actividad 1, con el observador puesto en el centro del universo, tal como muestra la imagen de abajo. El giro de la esfera rotatoria nos permitirá representar la trayectoria circular del Sol en dicha cúpula, cuyas coordenadas horizontales iremos estudiando en esta actividad.

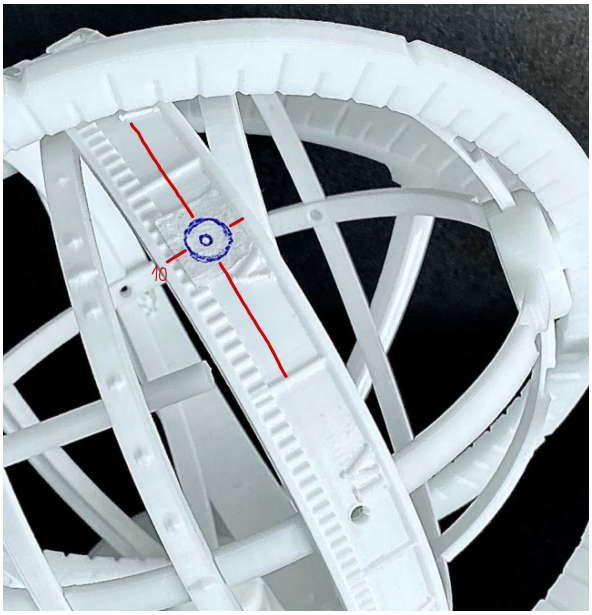


III. El Sol el día 10 de mayo

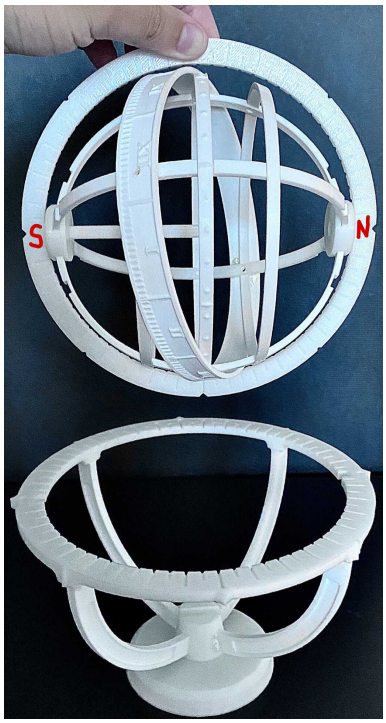
Estudiaremos con este instrumento cómo se mueve el Sol el día 10 de mayo en Concepción, que recordemos fueron la fecha y lugar de la inauguración de nuestro proyecto el año 2024. Recordemos que ya hemos realizado estos cálculos con el astrolabio, por ello tendremos la posibilidad de contrastar lo que haremos a continuación con lo que ya hemos hecho la actividad pasada.

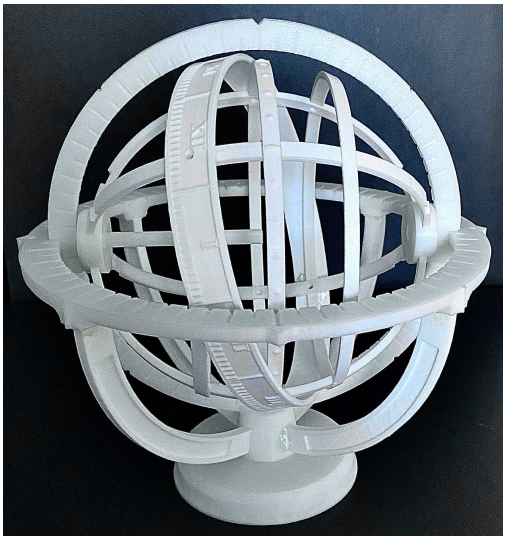
Como estudiaremos el día 10 de mayo, entonces buscaremos en la eclíptica el mes 5 del año (V en romano). Teniendo en cuenta que entre una marca y la siguiente en la eclíptica equivale a 2 días, entonces el día 10 de mayo estará ubicado como en la imagen abajo a la izquierda. Y es precisamente a la altura de esa marca de la eclíptica, *pero en la mitad del grosor de la banda*, donde ubicaremos un solcito hecho sobre cinta de enmascarar (masking tape o pegote), de tal manera que su punto central quede exactamente situado en el punto que ya hemos ubicado en la eclíptica, como en la imagen abajo a la derecha.





Ya habiéndonos ubicado temporalmente, ahora procedemos a ubicarnos espacialmente. Para ello, comenzamos tomando con nuestras manos la esfera rotatoria, orientándola de tal manera que su eje Norte-Sur quede horizontal[12]. Manteniendo la horizontalidad del eje Norte-Sur hacemos que el *meridiano*, que es el círculo grande que rodea toda la esfera rotatoria, quede montado correctamente sobre el horizonte[13].

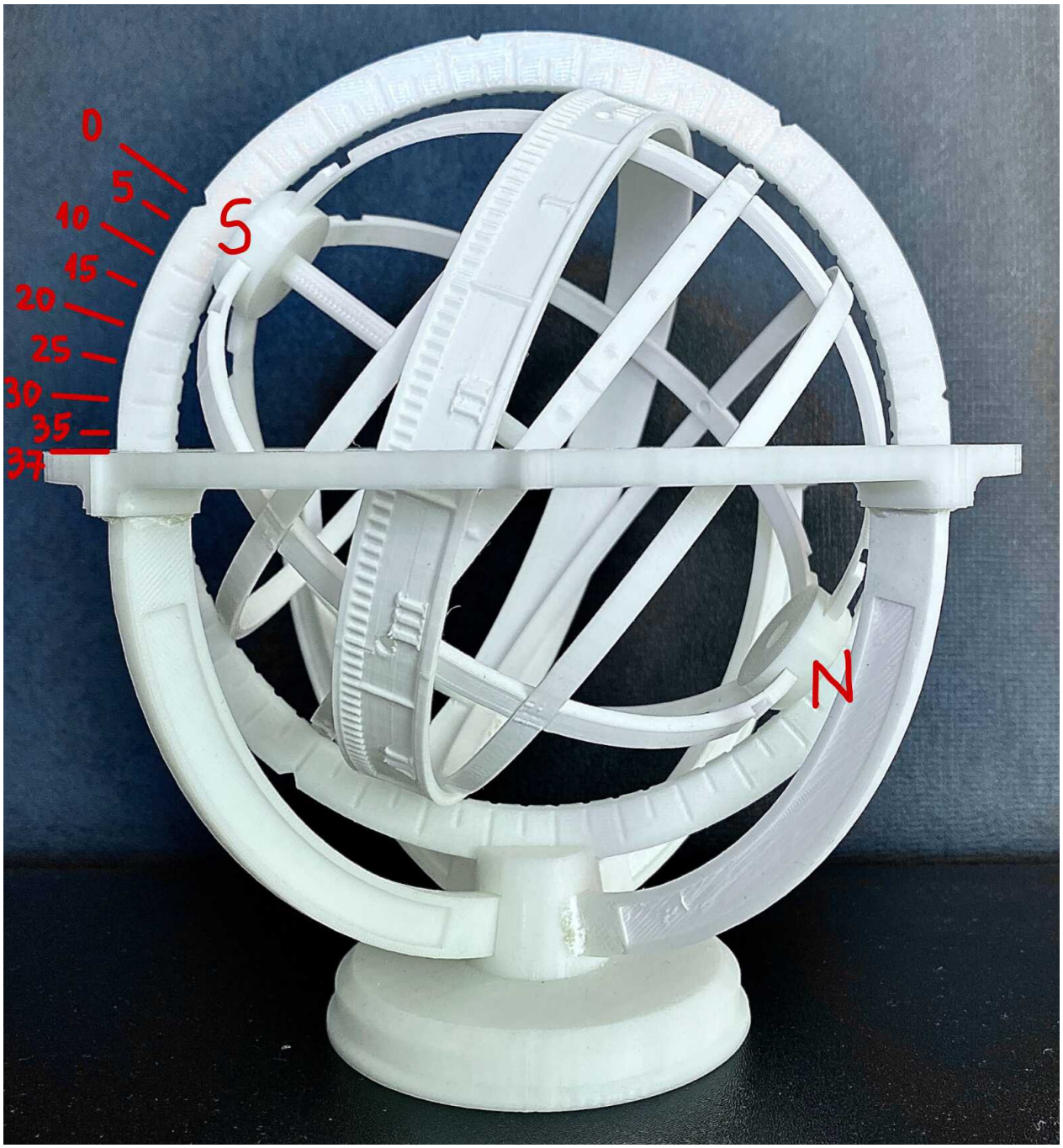




[12] El eje Norte-Sur está dado por el palito interior a la esfera rotatoria, y el extremo de donde surge dicho palito es el polo sur de la esfera. El polo norte de la esfera rotatoria será la pieza opuesta al polo sur.

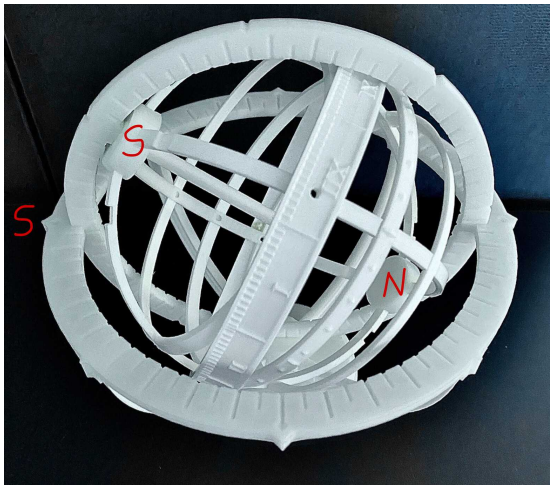
[13] Para que la esfera rotatoria quede bien montada debemos hacer que el meridiano quede bien puesto en 3 puntos: las 2 aberturas en el horizonte y la abertura en la base (vea más arriba la imagen derecha donde presentamos la montura del horizonte). Si no encajamos bien la esfera rotatoria, entonces los cálculos no resultarán correctos.

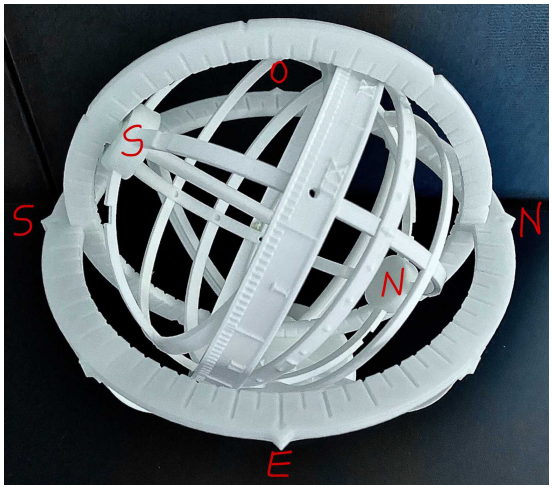
Dado que queremos estudiar el movimiento del Sol en Concepción, que es una ciudad ubicada en el hemisferio sur del planeta, entonces debemos hacer que el ángulo entre el polo sur de la esfera rotatoria y el horizonte sea igual a la latitud de Concepción, que es de 36.8° sur (para efectos de cálculo es suficiente con buscar aproximarse a 37°, que es bastante cercano a 36.8°). Notemos que en la imagen siguiente las marcas sobre el meridiano van de 5° en 5°, partiendo desde 0° en el polo sur de la esfera rotatoria.



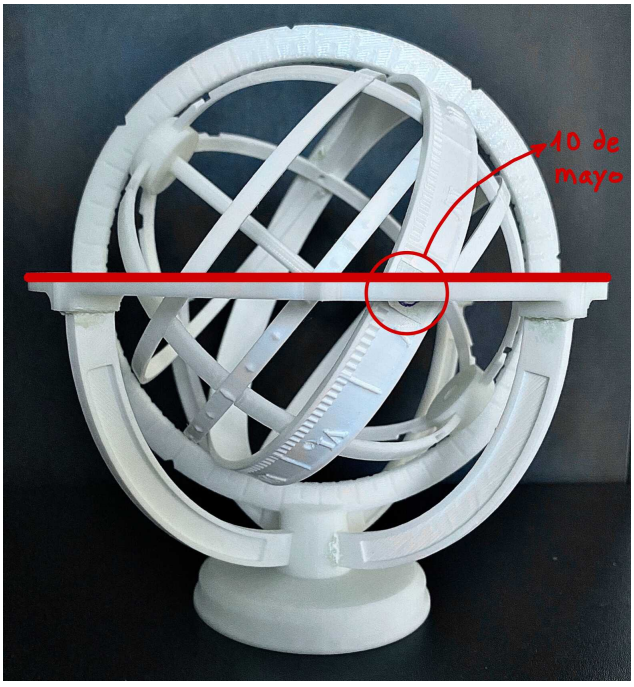
En estas condiciones nos hemos ubicado espacialmente en la latitud de Concepción.

Ahora debemos notar que la dirección Sur sobre el horizonte depende de la dirección en la que apunte el polo sur de la esfera rotatoria (abajo izquierda), lo cual nos entrega inmediatamente los otros 3 puntos cardinales (abajo derecha).

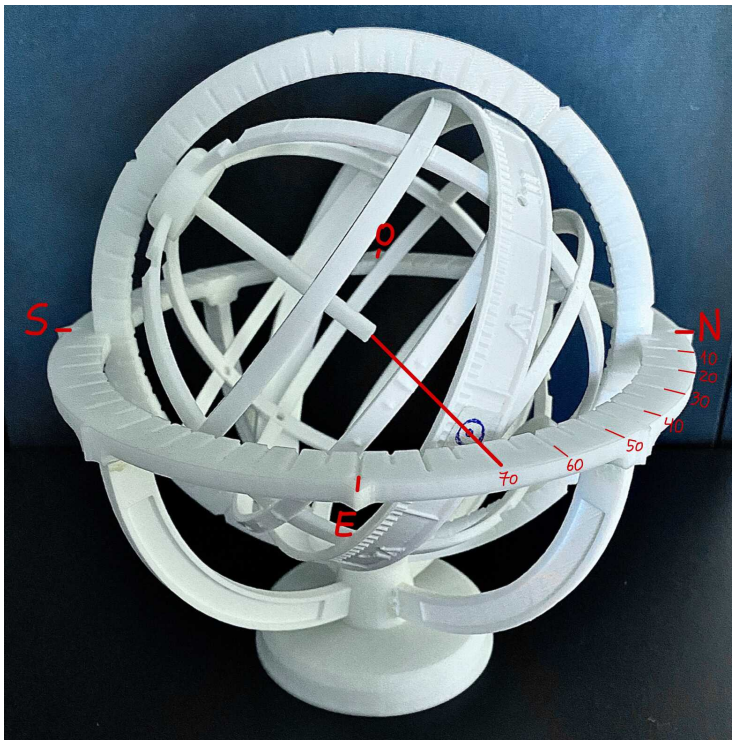


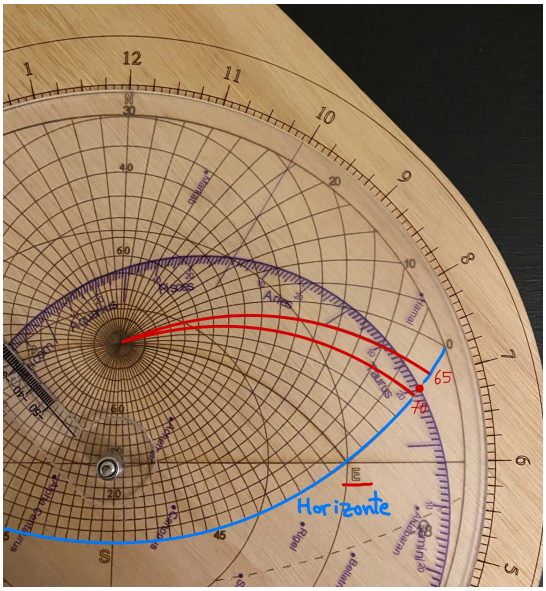


Ya lo tenemos todo: con la cinta de enmascarar hemos situado el Sol en el día 10 de mayo; con la inclinación apropiada de la esfera rotatoria nos hemos ubicado en la ciudad de Concepción; y tenemos los 4 puntos cardinales para orientarnos en el horizonte. Ahora solo basta hacer girar la esfera de Este a Oeste (de la misma manera que girábamos la araña del astrolabio en sentido antihorario) para emular cómo el Sol atravesará la línea del horizonte (línea roja en imagen de abajo) cerca del Este, y así podremos ver el azimut de su salida en dicho día.



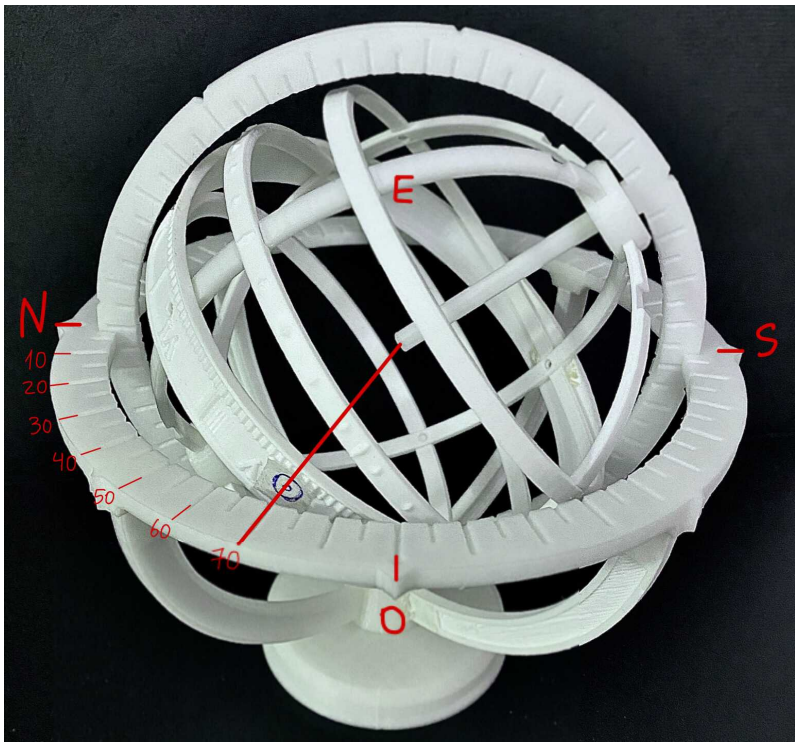
A continuación tenemos que unir mediante una línea imaginaria la punta del palito largo del meridiano[14] con el centro del solcito pegado sobre la eclíptica, e intersectando dicha línea con las marcas de ángulos en el horizonte, podemos ver claramente que el ángulo de azimut de la salida del Sol dicho día es de 70°. Recordemos que en el astrolabio habíamos obtenido un azimut de salida del Sol igual a 68°, pero debemos tener en cuenta que en este caso la esfera armilar es un objeto impreso en 3D y el plástico impreso tiene un margen de error en sus dimensiones. Una diferencia de 2° como en este caso es tolerable, pero no más que eso.

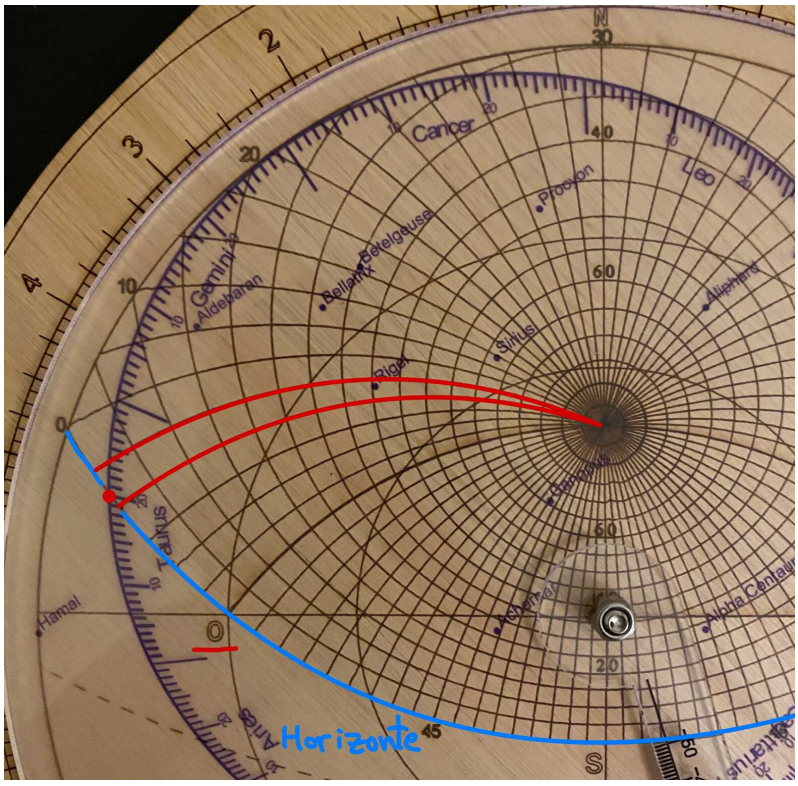




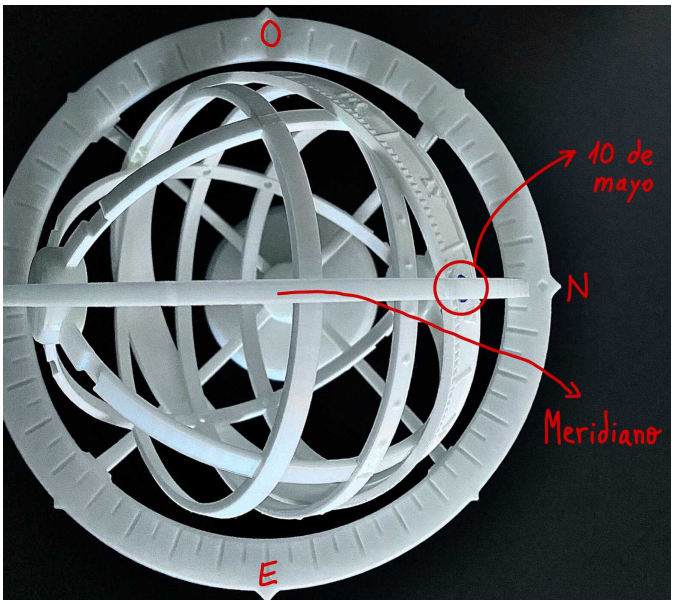
[14] Que representa el centro del universo donde está nuestro observador.

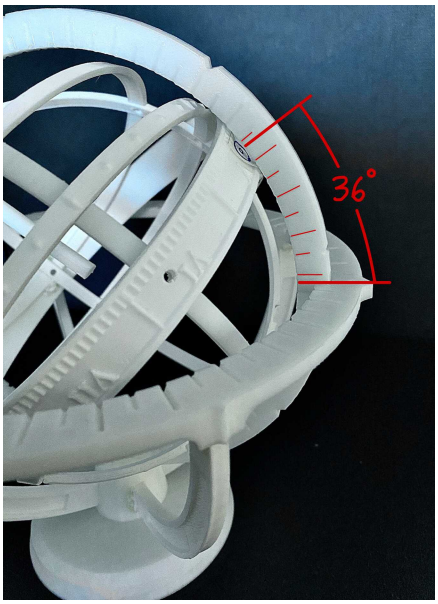
Para calcular el azimut de la puesta del Sol para el 10 de mayo hacemos el mismo procedimiento, pero haciendo que el Sol cruce el horizonte cerca del Oeste, obteniendo la configuración siguiente tanto en la esfera armilar como en el astrolabio. Obtendremos así los mismos 70° pero medidos desde el Norte al Oeste.



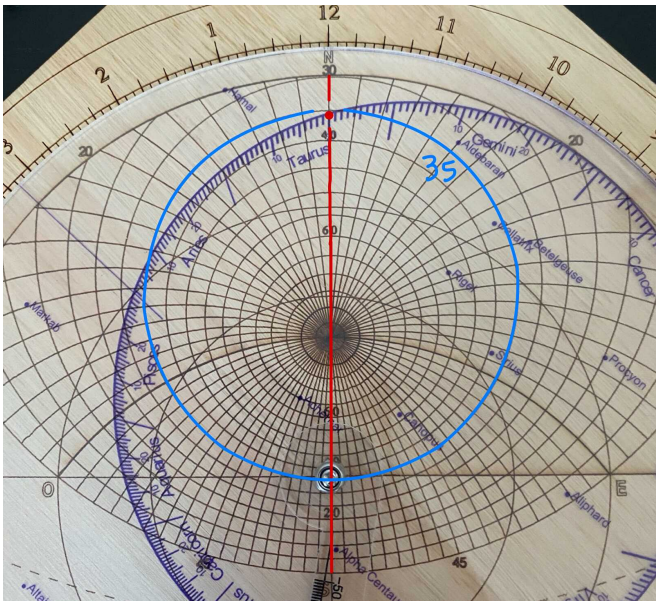


Finalmente, para calcular la altura máxima del Sol en dicho día, recordemos cómo fue que lo hicimos con el astrolabio: en dicha ocasión hicimos que el Sol atravesara la línea Norte-Sur. En el caso de la esfera armilar tenemos que el meridiano juega el papel del eje Norte-Sur (ya que pasa precisamente por el Norte y el Sur del horizonte), por ello la altura máxima del Sol la conseguimos haciendo que el astro quede justo por debajo del meridiano, como en las imágenes siguientes.



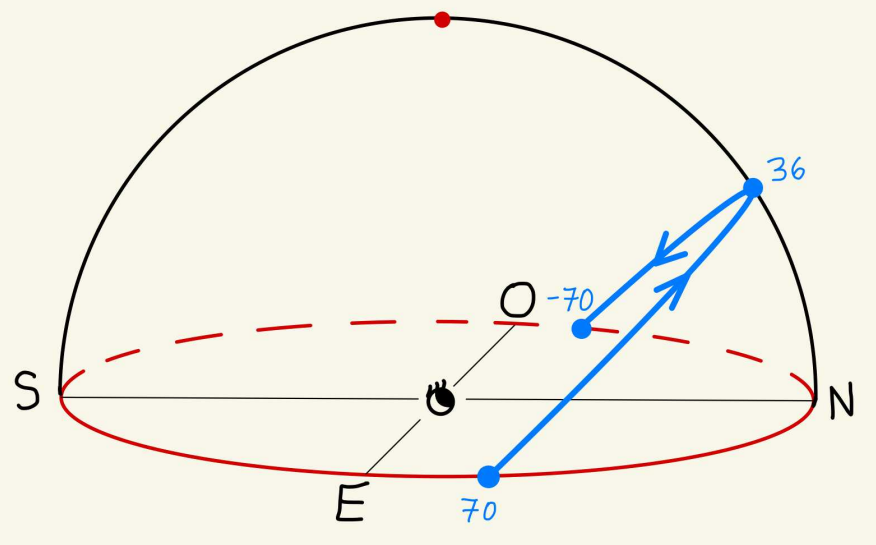


Ahí podemos ver que al sumar los pequeños tramos de 5° obtenemos un valor ligeramente mayor a 35°, es decir, obtenemos 36° grados. Recordemos que con el astrolabio ya habíamos calculado que la altura máxima del Sol este día 10 de mayo también era ligeramente mayor a 35° (ver imagen abajo), por lo que ambos instrumentos coinciden en este caso.



Poniendo en paralelo la esfera armilar con el astrolabio, podemos darnos cuenta que la esfera armilar nos entrega una manera visualmente más atractiva de comprender dicho movimiento, por su *tridimensionalidad*. El astrolabio, por su *bidimensionalidad*, nos hace perdernos una componente espacial que pudiera facilitar nuestra comprensión intuitiva del asunto.

En esta actividad condensaremos los 3 datos obtenidos para este día 10 de mayo —es decir, las coordenadas del Sol en su salida, su puesta y su altura máxima— a través de un *diagrama maestro*[15]. En el día recién estudiado el diagrama maestro será como la imagen a continuación[16].



IV. Solsticios y equinoccios

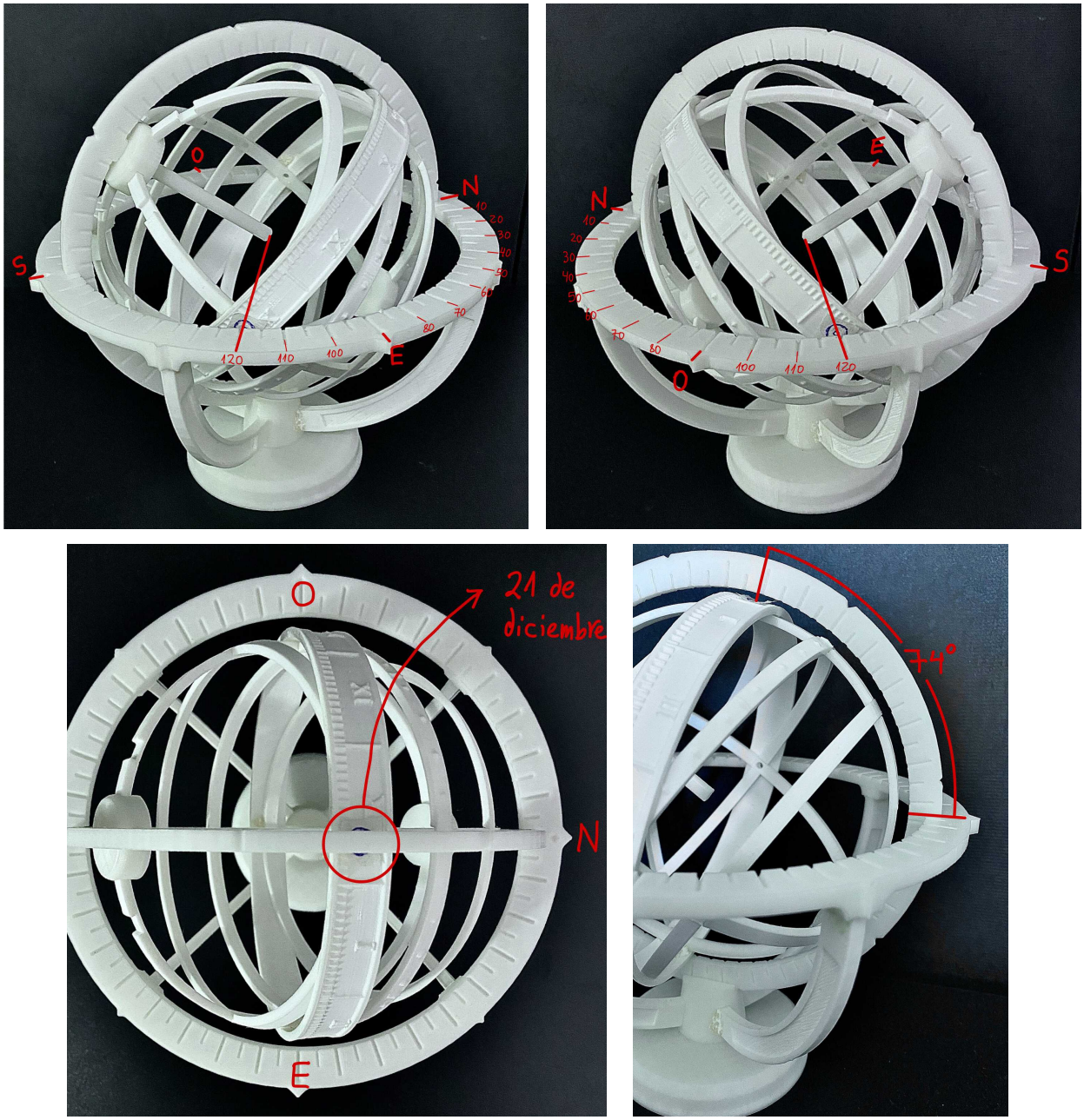
Los diagramas maestros que hemos introducido son muy interesantes, ya que con el simple cálculo de 3 datos nos permiten visualizar de manera muy clara cómo se mueve el Sol en un determinado día del año en una determinada latitud del planeta.

Si analizáramos con la esfera armilar, por ejemplo, qué pasa en el inicio del verano en Concepción, pondremos un Sol en el día 21 de diciembre[17], y estudiaremos su salida, puesta y altura máxima. La imagen en la página siguiente muestra que los azimut son de 120° y -120°, y la altura máxima es de 74°.

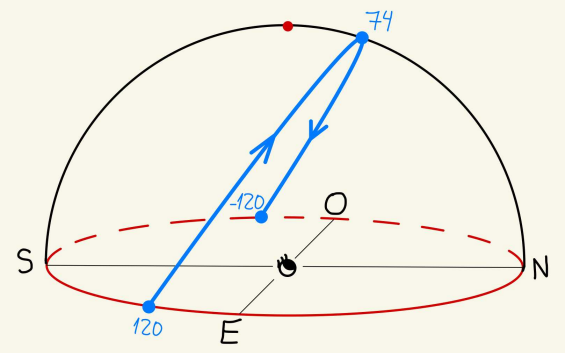
[15] Siempre que hagamos estos diagramas pondremos el Norte a la derecha, para así uniformizar los dibujos y sea más fácil leerlos y comprenderlos. También marcaremos con dos flechitas el sentido de la trayectoria del Sol.

[16] Durante la actividad 3 veremos que estos 3 datos, que son 3 puntos sobre la esfera, forman un triángulo, el cual a su vez genera un plano, que a su vez corta a la esfera celeste en un círculo. La trayectoria del Sol será precisamente ese círculo.

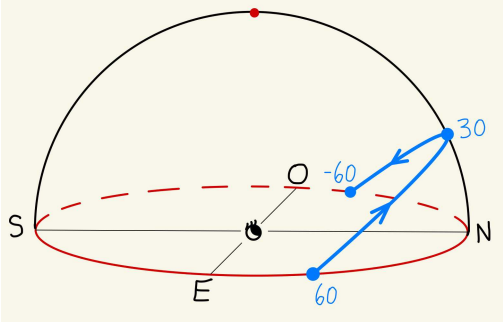
[17] Como bien veremos en breve, el inicio del verano es uno de los 4 puntos importantes de la eclíptica, los llamados solsticios y equinoccios. Siendo estrictos estos 4 instantes del año no son siempre los días 21, sino que a veces se mueven 1 o 2 días antes o después, debido a una serie de factores astronómicos y del calendario. No olvidemos que la esfera armilar es una modelo que representa al universo, y como todo modelo tiene limitaciones para comprender todos los posibles fenómenos que en él ocurren.



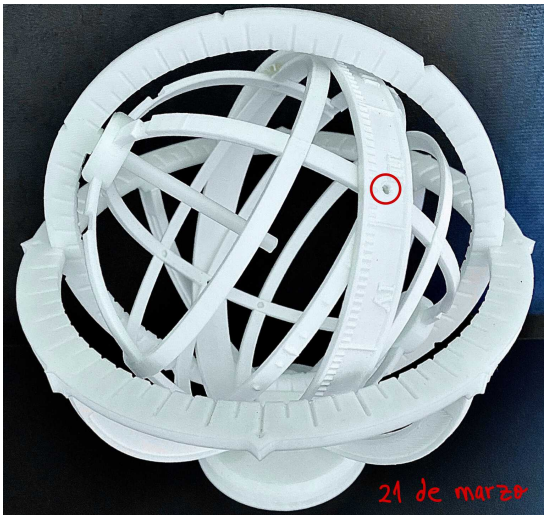
El diagrama maestro resultante será entonces el siguiente.



Haciendo el mismo trabajo para el inicio del invierno, que es el 21 de junio, obtendremos que el azimut de salida, puesta y altura máxima son 60°, -60° y 30°, respectivamente. Por ello el diagrama maestro asociado es el siguiente.



El inicio del verano y del invierno son 2 de los 4 puntos importantes del año que están representados en la eclíptica, según podemos ver en las imágenes siguientes.



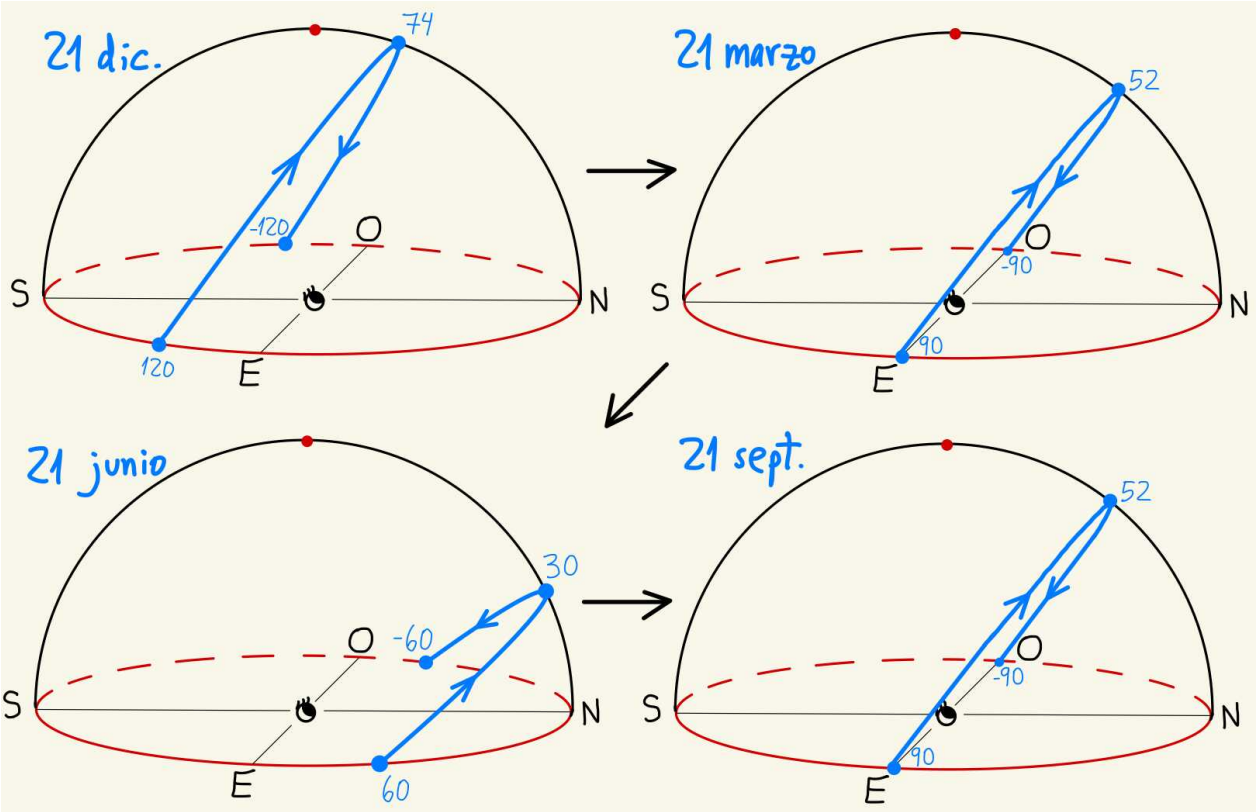
El 21 de diciembre es el llamado solsticio de verano del hemisferio sur (sería de invierno en el hemisferio norte).

El 21 de marzo es el llamado equinoccio de otoño del hemisferio sur (sería de primavera en el hemisferio norte).

El 21 de junio es el llamado solsticio de invierno del hemisferio sur (sería de verano en el hemisferio norte).

Finalmente, el 21 de septiembre es el llamado equinoccio de primavera del hemisferio sur (sería de otoño en el hemisferio norte)[18].

Los diagramas asociados para Concepción en cada uno de estos días especiales del año forman el ciclo anual en dicha ciudad, como podemos ver a continuación.

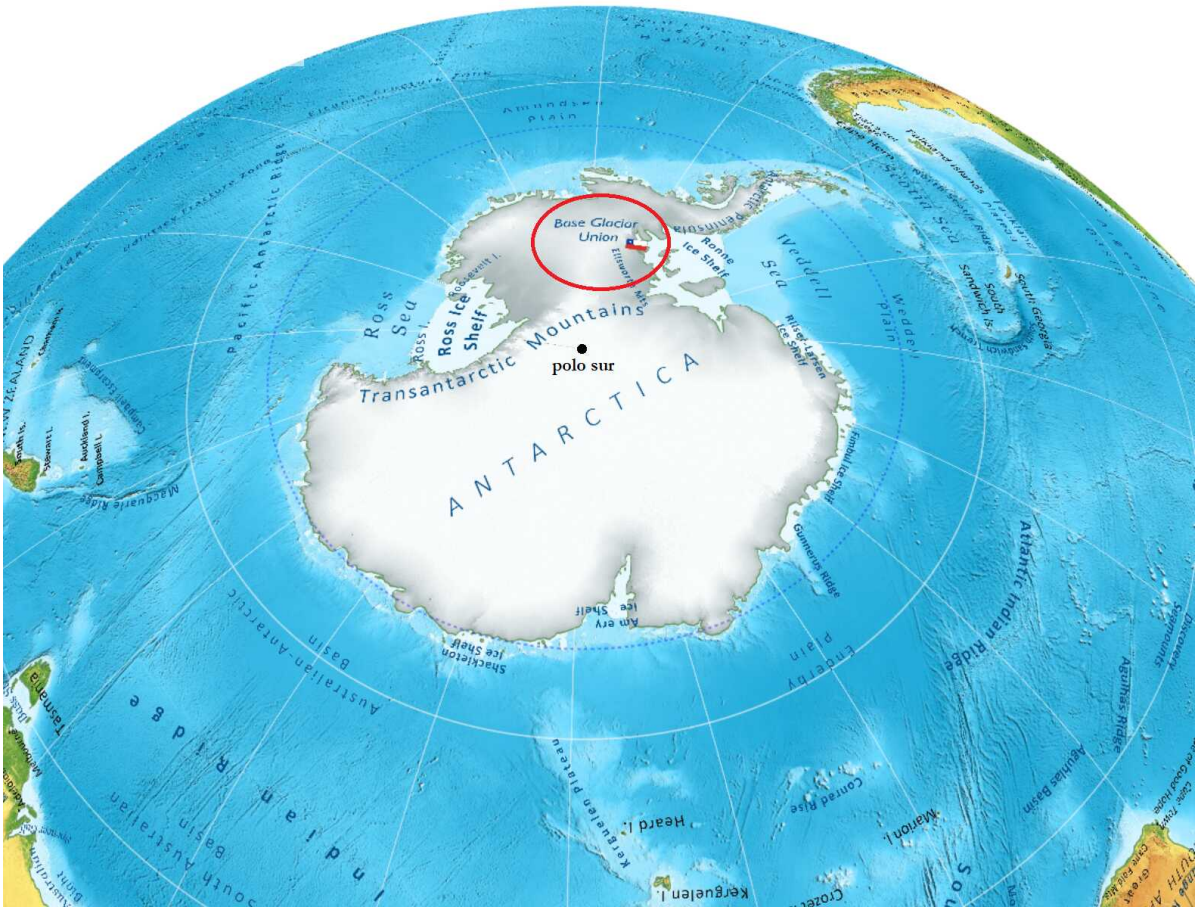


[18] Ya habíamos mencionado que los solsticios y equinoccios no son necesariamente siempre los días 21, y en el caso del periodo que cubre nuestro proyecto (2024-2025) tenemos que en Chile (y en todo el hemisferio sur del planeta) el solsticio de verano es el 21 de diciembre; el equinoccio de otoño es el 20 de marzo; el solsticio de invierno es el 20 de junio; y el equinoccio de primavera es el 22 de septiembre.

V. Base Glaciar Unión

Lo interesante de la esfera armilar es que nos permite realizar estos cálculos no necesariamente en Concepción (que es lo que hemos hecho hasta ahora, y por ello hemos podido contrastar con el astrolabio específico de Concepción), sino **en cualquier lugar del mundo**, ya que basta con inclinar la esfera rotatoria lo suficiente como para tener la latitud del lugar deseado. En este caso procederemos a estudiar un sitio muy especial del planeta, inaccesible para el ser humano común y corriente: un lugar cercano al polo sur terrestre donde hay días completos de oscuridad, y días completos de luz solar.

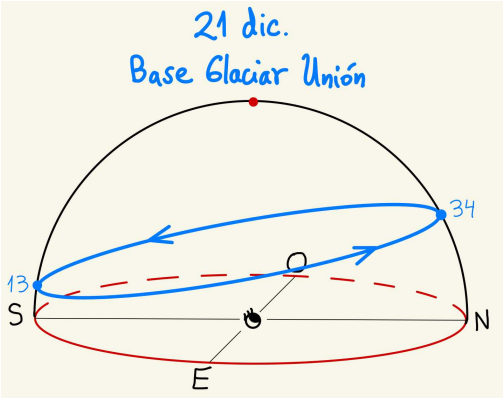
Supongamos que queremos estudiar el movimiento del sol en la Base Glaciar Unión, una estación científica chilena ubicada en la Antártica, muy cerca del polo sur (latitud 79.76° Sur, a poco más de 1000 km del polo).



Lo primero que haremos será montar nuestra esfera rotatoria sobre el horizonte, de tal manera que el ángulo formado por el polo sur (la base científica está en el hemisferio sur); el centro de la esfera (donde está ubicado el observador); y el horizonte, sea de 79.76°, que aproximaremos a 80°. Luego pegaremos nuestro solcito sobre el día 21 de diciembre, el ya estudiado solsticio de verano en el hemisferio austral.

Es increíble descubrir que la trayectoria del Sol en dicho día nunca atraviesa el horizonte, manteniéndose siempre encima de este. ¡Esto significa que durante todo ese día no hay noche! Podemos ver esto en la esfera a través de las imágenes a continuación, donde vemos la posición del Sol el 21 de diciembre en cuatro momentos distintos del giro de 360° grados de la esfera rotatoria, separados por 90°.

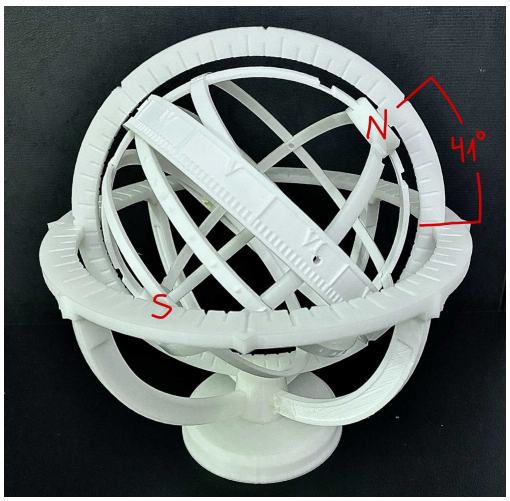
Recordemos que la altura máxima (y también la altura mínima) del Sol se consigue cuando este cruza el meridiano. En la imagen arriba izquierda es el mediodía, mientras que abajo a la izquierda es la "medianoche". Con ello vemos de manera clara cómo es que el Sol está siempre encima del horizonte en todo el giro, y por ello este fenómeno astronómico es denominado *Sol de medianoche*. La imagen a continuación es el diagrama maestro de esta extraordinaria situación.



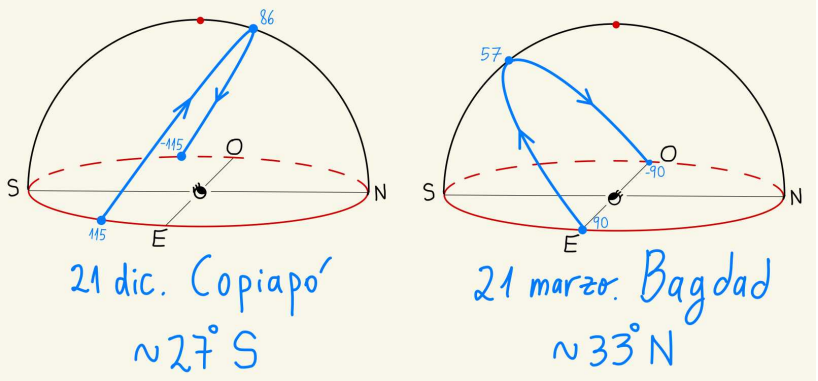
VI. Desafíos en Chile y el mundo

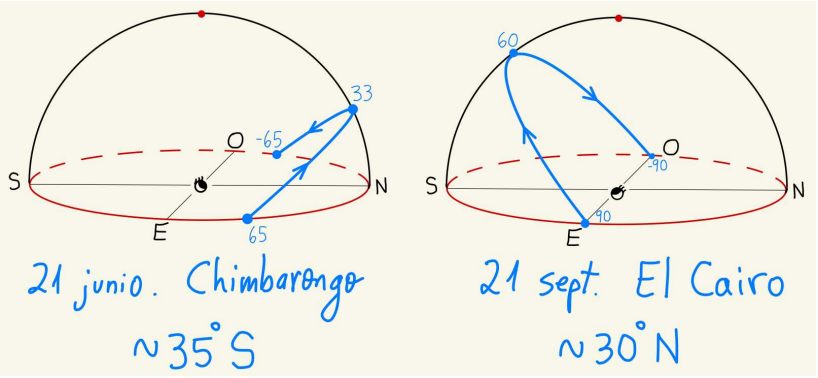
Finalmente, lo que haremos será estudiar el movimiento del Sol en latitudes del hemisferio norte de nuestro planeta. Para ello, lo único que hay que modificar de lo realizado anteriormente es hacer que el polo norte de la esfera rotatoria (y no el polo sur) forme un ángulo sobre el horizonte igual a la latitud de dicho lugar.

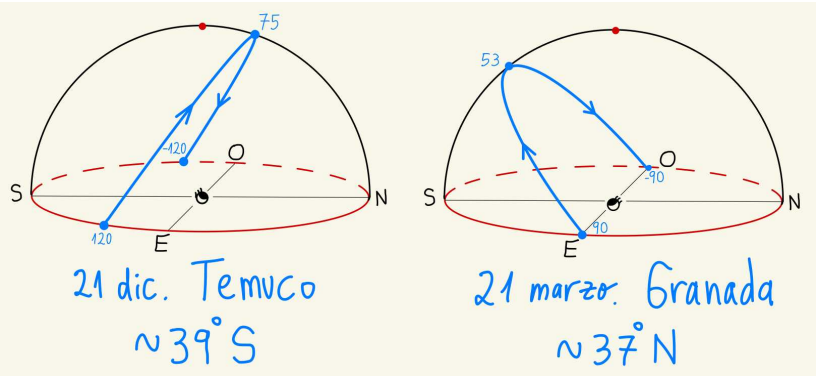
Por ejemplo, para estudiar el movimiento del Sol en la ciudad de Madrid, cuya latitud es de 40.5° (que aproximaremos por 41°), nuestra esfera armilar debería lucir como en la imagen siguiente.

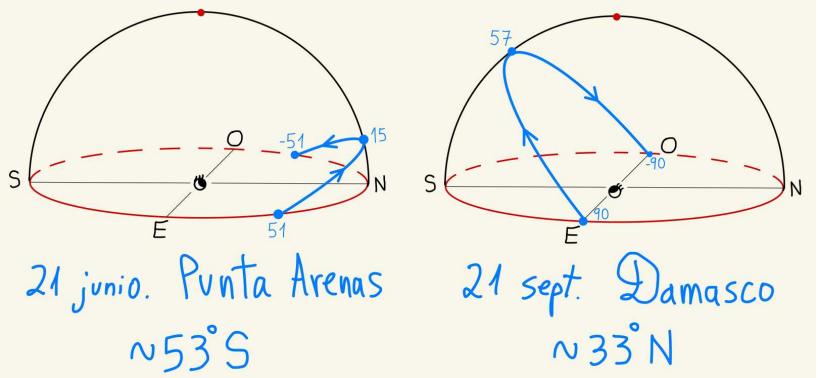


Para finalizar esta actividad mostraremos los diagramas maestros para algunas ciudades de Chile y otras que hemos seleccionado del hemisferio norte de nuestro planeta, siendo estas últimas un primer acercamiento a la civilización islámica que estudiaremos en la actividad 4.









VII. Resumen

Para finalizar esta actividad, y también así el uso de estos dos bellos instrumentos, es importante aclarar qué podemos y qué no podemos hacer con ellos.

Si pensamos en medir la posición de las estrellas en el cielo, claramente lo indicado es usar un astrolabio y no una esfera armilar, ya que este último instrumento (en la versión de impresión 3D) simplemente no tiene nada que represente estrellas. Pero a pesar de que el astrolabio tiene estrellas en su araña, no podemos medir sus posiciones en cualquier lugar del planeta, sino solamente para una latitud específica[19].

Si por otro lado pensamos en medir la posición del Sol en el cielo, aquí ambos instrumentos son apropiados, pero de distintas maneras:

1. Si nuestra intención fuera hacer mediciones del Sol para contrastar entre distintas latitudes, entonces es la esfera armilar la apropiada, puesto que las distintas latitudes se consiguen adecuando la inclinación del polo a la latitud deseada. El astrolabio no permite esa flexibilidad, ya que solamente deja realizar cálculos del Sol para una latitud fijada.

2. Si nuestra intención fuera determinar las coordenadas exactas del Sol en cualquier momento del día, entonces lo más apropiado es el astrolabio, ya que la esfera armilar solamente nos permite realizar esos cálculos para la salida, puesta y altura máxima. Si bien con la esfera armilar no tenemos forma de saber las coordenadas de un punto que no sea uno esos tres (a menos que nos ayudemos con una "regla esférica", que sería un cuarto de círculo graduado con el cual trazar el meridiano respectivo por el que pase el Sol en dicho momento), el astrolabio tampoco permite determinar las coordenadas del Sol en cualquier momento del día, sino solamente cuando está encima del horizonte o cuando está justo en la línea crepuscular. En cualquier caso, las mediciones tendrán sentido solamente para una latitud fija para la cual esté hecho el astrolabio.

Por ello podemos resumir todo en lo siguiente:

El astrolabio permite realizar cálculos precisos de las coordenadas del Sol y de las estrellas durante todo el día y en cualquier momento del año, pero para una latitud fijada.

La esfera armilar permite realizar cálculos precisos de coordenadas del Sol (pero no de las estrellas) en cualquier lugar del planeta, pero asegurándonos solamente los valores de la salida, la puesta y la altura máxima.

[19] Es cierto que existen astrolabios que funcionan en cualquier latitud —los llamados *astrolabios universales*— pero en este proyecto no abordamos su uso, sino que solamente damos fe de su existencia e importancia histórica durante la actividad 4. Esperamos abordar en algún proyecto futuro estos hermosos instrumentos universales, que plantean un desafío no solamente a nivel de su construcción teórica, sino también de su uso práctico y de su contexto cultural.

Desafíos*

Los siguientes desafíos son opcionales dentro de la actividad original del proyecto, y pueden ser propuestos siempre que sobre tiempo o el grupo de participantes esté en un contexto (como un taller de astronomía) donde cuenten con el tiempo para reflexionarlos.

Desafío 1. Determine todos los días del año en Concepción de tal manera que el Sol tenga una altura de 40° al mediodía.

Desafío 2. La altura máxima del Sol en Concepción se logra el solsticio de verano, siendo de 76° (verifíquelo). Por otro lado, en Santiago (que está más al norte) la altura máxima del Sol es de 80°, que es mayor que en Concepción (verifique esto también). Viendo que la altura máxima va aumentando a medida que nos vamos más hacia el norte de Chile, determine la primera ciudad de nuestro país para la cual la altura máxima del Sol sea exactamente de 90°, es decir, que el Sol pase justo por el zenit.

Los siguientes desafíos requieren el uso del "reloj" sobre el ecuador de la esfera rotatoria, es decir, de las marcas sobre esta pieza que nos permiten calcular el tiempo en relación a las 24 horas del giro completo de la esfera armilar. Para calcular el intervalo de tiempo en que un objeto del cielo realice cierto movimiento, basta con ver la marca sobre el ecuador más cercana al meridiano (que nos da una línea de referencia inmóvil) tanto al inicio como al final del movimiento. La cantidad de marcas que hubo que moverse para pasar del inicio al final nos dirá cuánto tiempo ha transcurrido entre ambos instantes. Tenga en cuenta que las marcas normales (tipo punto) son cada 10°, que equivalen a 40 minutos (porque 24 horas equivalen a los 360° del giro), y que hay unas marcas más grandes (tipo línea) cada 45°.

Desafío 3. Determinar cuánto tiempo transcurre en el día 10 de julio desde la salida del Sol hasta el mediodía, para su latitud. Haga el mismo cálculo con el astrolabio y compare.

Desafío 4. Determine cuánto dura en su latitud el día 10 de mayo, es decir, desde que el Sol sale hasta que se pone. Compare lo obtenido en este desafío con lo que obtuvo en el desafío 4 del astrolabio.

Desafío 5. Determine en su latitud todos los días del año que tienen exactamente 10 horas de Sol. Compare lo obtenido en este desafío con lo que obtuvo en el desafío 5 del astrolabio.

Desafío 6. Determine todas las latitudes del hemisferio sur para las cuales hay un día del año (entre salida y puesta) que dure exactamente 6 horas. ¿Hay alguna ciudad en dicha latitud?

Sugerencias para realizar la actividad

La segunda actividad de este proyecto tiene 3 partes, cuyas descripciones y tiempos ideales son los siguientes:

1. Primero recibiremos a los profesores y sus estudiantes en la sala donde realizaremos la actividad, donde firmarán la lista. Cuando ya hayan llegado todos, les pediremos que se ordenen en los grupos creados de manera aleatoria para esta actividad (que no coincidarán con los de la actividad pasada), los cuales estarán proyectados en el telón. Considerando que no hay test de entrada en esta ocasión, todo esto debiera estar listo como mucho 10 minutos después de la hora de inicio agendada.

2. Ya con todos los grupos correctos sentados, empezaremos la actividad de la esfera armilar con el apoyo del PPT oficial, cuya duración ideal será de 1 hora y 45 minutos. En esta parte habrá una pausa intermedia para que los estudiantes y profesores puedan reposar su mente, así como también habrá una actividad en que los grupos trabajarán de manera esencialmente independiente, aunque bajo la mirada atenta del profesor encargado y los monitores.

3. Terminado el punto anterior entregaremos el test de salida a cada profesor y a cada estudiante, que por tener 4 breves preguntas debieran resolver en como mucho 10 minutos. Finalmente, les pediremos a todos los participantes que nos esperen a la salida para tomarnos una foto en conjunto.

En resumen, considerando los posibles retrasos y las pausas intermedias, la actividad completa está pensada para ser realizada en como mucho 2 horas y 15 minutos. El horario ideal para realizar esta actividad es entre las 10:00 y las 12:15 hrs, durante cualquier día entre lunes y jueves.

Ahora pasaremos a detallar cuáles son los puntos que debemos tocar sí o sí en la actividad de la esfera armilar, enmarcados en la parte 2 mencionada anteriormente.

En primer lugar, es importante destacar que la finalidad de esta actividad es eminentemente práctica, de trabajo en equipo y de experimentación entre los participantes. Es fundamental indicar al inicio de esta actividad que al final de esta habrá unos desafíos (de la sección VI) que requerirán de su astucia e inteligencia, acorde a lo que iremos aprendiendo.

Sección II. Partes de la esfera armilar

Comenzar aclarando que los antiguos, previos al 1500, consideraban que el universo era una esfera. Por ello la forma de la esfera rotatoria.

Indicar que el ensamblado de las 17 piezas en una esfera armilar completa está explicado en el Capítulo 2 de la Parte II, llamado "Cómo conseguir una esfera armilar (actividad 2)".

Sección III. El Sol el día 10 de mayo

Cada grupo debe hacer un solcito de pegote y, junto a la supervisión de un monitor, debe ubicarlo en el lugar correcto.

Igualmente los monitores deben estar atentos a si los grupos inclinan correctamente la esfera rotatoria sobre el horizonte acorde a la latitud, considerando que es el polo sur y no el polo norte el que debe quedar sobre el horizonte.

Destacar el hecho que ubicarnos el solcito en la eclíptica nos ubica *temporalmente*, mientras que hacer que el polo quede inclinado el mismo ángulo que la latitud con respecto al horizonte nos ubica *espacialmente*.

Notar que los puntos cardinales dependen de dónde ubiquemos el polo, y con 1 punto cardinal podemos ubicar inmediatamente todos los demás.

Mencionar que el astrolabio y la esfera armilar pueden dar valores ligeramente distintos, pero un error de 2° está bien. El error dependerá qué tan bien fueron impresas las piezas, sin olvidar que el propio astrolabio tiene su propia posibilidad de error porque pueden quedar descentrados el tímpano y la araña.

Destacar que cuando el Sol cruza el meridiano obtenemos su altura máxima.

Decir que los *diagramas maestros* nos acompañarán durante todo el resto de la actividad, porque son una representación visual de lo que vemos en la esfera armilar.

Insistir en que en cada diagrama el Norte debe ir a la derecha, y en que deben poner las flechitas que indican el sentido de giro del Sol.

Al terminar esta sección haremos una pausa de 5 minutos.

Sección IV. Solsticios y equinoccios

Destacar que en la esfera armilar los solsticios y equinoccios son los 4 hoyitos que tiene la eclíptica, y que están separados por 90° en la esfera rotatoria.

Es importante indicar que en realidad los solsticios y equinoccios no tienen por qué ser siempre los días 21, y pueden ir variando de año en año. Mencionar los solsticios y equinoccios *verdaderos* del periodo 2024-2025 desde diciembre 2024 a septiembre 2025, acorde a lo mostrado en el pie de página después de los diagramas maestros de esos 4 puntos de la eclíptica en Concepción.

Sección V. Base Glaciar Unión

Insistir en que con la esfera armilar podemos estudiar el movimiento del Sol en cualquier lugar del planeta y en cualquier momento del año, incluso pudiendo ver qué sucedería en latitudes a las que el ser humano común no podría nunca acceder (como lugares cercanos a los polos). La Base Glaciar Unión es un excelente ejemplo para ver los extraños fenómenos que suceden en nuestro planeta.

Lo ideal es que los monitores apoyen a los grupos para que ellos mismos manipulen la esfera armilar y vean directamente cómo es que en dicho lugar, en el solsticio de verano, el Sol nunca cruza el horizonte.

Sección VI. Desafíos en Chile y el mundo

En esta sección cada grupo debe trabajar para diseñar diagramas maestros basándose en los cálculos realizados por la esfera armilar con la que cuentan. Como la actividad está pensada para 4 grupos de estudiantes (y 1 grupo de profesores) entonces les pediremos a cada grupo que estudie una de las parejas de lugares que describimos en esta sección (al grupo de profesores le damos alguno de esos pares al azar), entregándoles el día a estudiar pero sin mencionar la latitud, la cual ellos mismos deben averiguar (buscando en internet).

Los monitores y el profesor encargado de la sede deben estar muy atentos para orientar y facilitar las mediciones de cada uno de los grupos, pero también deben darles la libertad para trabajar e involucrarse con los problemas.

Esta actividad debe tomar el tiempo necesario para que los grupos trabajen tranquilos, unos $\sim$20 minutos estaría excelente, aunque si la actividad sufrió retrasos previos entonces debemos cerrar esta sección antes para priorizar el resumen, que requiere de unos $\sim$15 minutos.

Hemos diseñado cada par de lugares de tal manera que haya una ciudad de Chile (a modo de fortalecer la pertenencia) y una ciudad de la civilización islámica medieval. Con este criterio aparentemente arbitrario cumplimos dos funciones: en primer lugar, que los estudiantes reconozcan que estos estudios con la esfera armilar pueden realizarse tanto en el hemisferio sur como el hemisferio norte de nuestro planeta. En segundo lugar, para que con estos ejemplos concretose se vayan familiarizando con nombres de ciudades que estudiaremos en la actividad 4, en la que abordaremos cómo la astronomía, la matemática y la historia se entrelazan en el fascinante mundo islámico medieval.

Sección VII. Resumen

Es importante comentar el resumen en su totalidad, porque sintetiza todo lo recién aprendido y adicionalmente es la última actividad que involucra a estos instrumentos de manera directa.

Lo ideal es trabajarlo a modo de preguntas a los estudiantes, es decir, preguntando:

De los 2 instrumentos estudiados hasta este punto, ¿Qué instrumentos nos sirven para medir la posición de las estrellas? ¿Qué limitaciones hay?

De los 2 instrumentos estudiados hasta este punto, ¿Qué instrumentos nos sirven para medir la posición del Sol? ¿Qué limitaciones hay?

La idea es comentar todo lo descrito en esta sección pero que sea resultado del diálogo entre los grupos, los profesores, los monitores y el profesor encargado.

Otras sedes

Hay una última cosa importante a tener en cuenta: algunos ejemplos de esta actividad fueron pensados para funcionar exclusivamente en la latitud de Concepción. Por ello es que a continuación mostramos todos los valores que debemos usar en los ejemplos a ser trabajados en cada uno de los territorios, que pertenecen a las secciones 2 y 3.

Sección		**Concepción**	**Valdivia**	**Puerto Montt**	**Santiago**
III	Latitud "real" vs aprox.	36.8 $\sim$ 37	39.8 $\sim$ 40	41.4 $\sim$ 41	33.4 $\sim$ 33
III	Sol 10 mayo salida, puesta, alt. max.	68,-68, 36	67,-67, 33	67,-67, 32	69,-69, 39
IV	Solsticio verano 21 dic. salida, puesta, alt. max.	120,-120, 74	121,-121, 73	122,-122, 72	118,-118, 80
IV	Equinoccio otoño 21 mar. salida, puesta, alt. max.	90,-90, 52	90,-90, 50	90,-90, 49	90,-90, 56
IV	Solsticio invierno 21 jun. salida, puesta, alt. max.	60,-60, 30	59,-59, 27	58,-58, 26	62,-62, 32
IV	Equinoccio primavera 21 sept. salida, puesta, alt. max.	90,-90, 52	90,-90, 50	90,-90, 49	90,-90, 56

Capítulo 3: Fundamentos teóricos

Palabras clave. *Esfera celeste, modelo del universo, modelo geocéntrico, Ilustración, primer experimento mental, giro estelar, segundo experimento mental, eclíptica, solsticios, equinoccios, trópico de capricornio, trópico de cáncer, retrogradación planetaria, tercer experimento mental, horizonte, planos y esferas, latitud y polo, esfera armilar, astrolabio, proyección estereográfica, cónicas, coordenadas ecuatoriales, declinación, ascensión recta.*

Contenido de la actividad

I. Introducción

La esfera celeste, como bien iremos descubriendo, es una esfera matemática que representará a todo el universo, en cuyo centro estará quieto nuestro planeta Tierra[20], y en cuya superficie estarán ubicadas las estrellas. Antes de proceder a estudiar esta esfera, aclaremos inmediatamente una cosa, para evitar malos entendidos. Es cierto que desde hace aproximadamente 500 años hemos ido amasando poco a poco, y gracias a diversos descubrimientos científicos posteriores al telescopio, la idea de que el universo **no** es una perfecta esfera con las estrellas en su superficie, así como también sabemos que la Tierra **no** está en el centro del universo (porque de hecho ni siquiera tiene sentido hablar de un centro). Podríamos entonces preguntarnos: ¿Para qué estudiar esta esfera, si dijimos que no representa correctamente el universo? Lo haremos por una razón muy simple, pero a la vez muy profunda:

Intentaremos tomar conciencia de la forma en que las personas de la antigüedad concebían el cielo y sus movimientos, en su propio contexto.

Esta toma de conciencia, que es un intento de "ponerse en los zapatos" de los antiguos (previos al año 1500), es lejana a un abordaje exclusivamente técnico-conceptual de las teorías científicas del pasado. Nuestra aproximación a estos instrumentos científicos y las teorías que esconden pretende ser más integral, abordando no solamente los contenidos matemáticos sino también sus aspectos históricos, sociales y culturales. La novedad de nuestro proyecto recae en esta importante distinción, y será el marco general en el cual trabajaremos estas 3 actividades que nos quedan.

En *Geómetras del Cielo* hemos concebido esta toma de conciencia separándola en 3 fases interconectadas. La primera fase, perteneciente al mundo de lo sensorial y lo práctico, consiste en comprender de manera práctica cómo usar los dos objetos astronómico-matemáticos que hemos abordado en las actividades 1 y 2. Debemos manipularlos con nuestras manos, sentirnos cómodos con ellos, manejarlos a la perfección. También debemos reconocer de primera mano la importancia de su materialidad, su evidente complejidad y su poder predictivo, así como también su carácter tangible y práctico a la hora de estudiar el cielo.

[20] Dicho punto central que contiene al planeta evidentemente contendrá también a todas las personas que viven en él, en todas sus posibles latitudes.

La segunda fase, que pertenece al mundo teórico de la matemática y la astronomía, consiste en descubrir que esos dos instrumentos son portadores de una buena cantidad de saberes matemáticos complejos y sutiles, los cuales iremos desglosando en las actividades 3 y 4.

Finalmente tenemos la tercera fase, que consiste en descubrir que estos dos objetos no fueron elegidos al azar: fueron parte de las representaciones materiales más influyentes del universo en la Edad Media, pasando por las manos de artesanos, pensadores, y la realeza de la época. Esta es la fase que no es ni estrictamente material ni estrictamente matemática, sino más bien de corte humanista, y cubrirá las actividades 4 y 5. Abordaremos, dentro de nuestras posibilidades, el contexto socio-cultural que rodeó estos instrumentos geocéntricos, viendo cómo se mezclan la historia, las ciencias, la materialidad y la historia de la cultura de una manera completamente natural.

Ya hemos tenido el privilegio de vivir la fase 1, la de la manipulación táctil y operacional de los instrumentos, y ahora empezaremos la fase 2, en la cual le tomaremos el peso intelectual a las ideas matemáticas y astronómicas subyacentes a estos objetos científicos. Para ello comenzaremos aclarando que debemos evitar la idea común y extendida de que los pensadores de la antigüedad eran menos inteligentes que nosotros, ya que, tal cual iremos viendo, esta gente tenía (como mínimo) un amplísimo conocimiento matemático. Su perfecto dominio de la geometría tridimensional, que poco a poco iremos desgranando, nos deberá hacer desechar la idea de que estos pensadores medievales vivieron un periodo de decadencia e ignorancia. Con esta pequeña pero incisiva advertencia en mente estaremos en condiciones de poner en duda afirmaciones simplistas e ingenuas sobre el pasado (como que la Edad Media no fue nada más que una edad oscura y de ignorancia), y le tomaremos más peso a los saberes medievales, al menos en sus aspectos matemáticos-astronómicos. Comencemos entonces reflexionando sobre la siguiente frase:

Durante muchos siglos el ser humano creyó que las estrellas, el Sol, la Luna y los planetas se movían alrededor de la Tierra, estando esta fija en el centro del universo[21].

Si lo pensamos dos minutos, pero de manera verdaderamente concienzuda, nos podremos convencer de que las personas de la antigüedad tuvieron sobradas razones para pensar así, ya que no hay nada evidente, ni en el cielo ni en la Tierra, que nos pudiera llevar a pensar que nuestro planeta está en movimiento. Desde este momento, y poco a poco, ***nos iremos poniendo medievales.***

[21] Aunque aquí mencionemos a la Luna y los planetas, la esfera celeste que estudiaremos en esta actividad no los incluirá, sino solamente a las estrellas y el Sol, por razones que iremos viendo entre esta actividad y la siguiente.

Para ello le pido que se siente tranquilamente en una silla, y mire el cielo. Por un lado estará usted en absoluto reposo, mientras que allá arriba el Sol, y eventualmente las estrellas y los planetas (y la Luna si es que está visible), son los que se están moviendo (aunque sea muy lento). Evidentemente a nadie se le ocurriría pensar que nuestro planeta está en movimiento, ni mucho menos que es una enorme "nave espacial de roca" que va viajando por el universo alrededor del Sol a más de 100.000 kilómetros por hora. Si estamos habituados a estas nociones tan contraintuitivas es porque hemos sido educados para ello, a través de una larga tradición intelectual heredera de las ideas de la Ilustración. Este fue un movimiento cultural europeo que en el siglo XVIII entronizó la *razón* y consideró que ésta, a través de la ciencia y la técnica, definiría el progreso de la humanidad. Un excelente ejemplo del poder de esta *razón* fue la exactitud y universalidad presente en la astronomía, principalmente en la obra de Isaac Newton (en el 1700 aprox.). Pero dejemos de lado a Newton y volvamos a las ideas medievales del universo.

Nuestro planeta, dijimos, está quieto. Si asumimos una Tierra estática desde la cual observamos el movimiento de las estrellas, el Sol, la Luna y los planetas, y si adicionalmente estudiamos sus movimientos matemáticamente e intentamos comprender todo ello en un marco teórico, es probable que lleguemos a conclusiones similares a una visión del mundo que históricamente hemos denominado *visión geo-céntrica* (centrada en la Tierra). El mundo griego, hace aproximadamente 1800 años, fue uno de los más profundos a la hora de proponer un universo geo-céntrico *en términos matemáticos*, y fue en esta cultura donde floreció el más elegante objeto intelectual relativo a dicha visión del universo: la esfera celeste, que estudiaremos en esta actividad[22]. Como un pequeño acto de respeto a las antiguas culturas que trabajaron estos asuntos, haremos el esfuerzo de *omitir/suspender/dejar de lado* buena parte de lo que hemos aprendido de la astronomía moderna, y procederemos a ***intentar pensar como los antiguos***, haciendo el siguiente "experimento mental":

II. Primer experimento mental: la esfera celeste

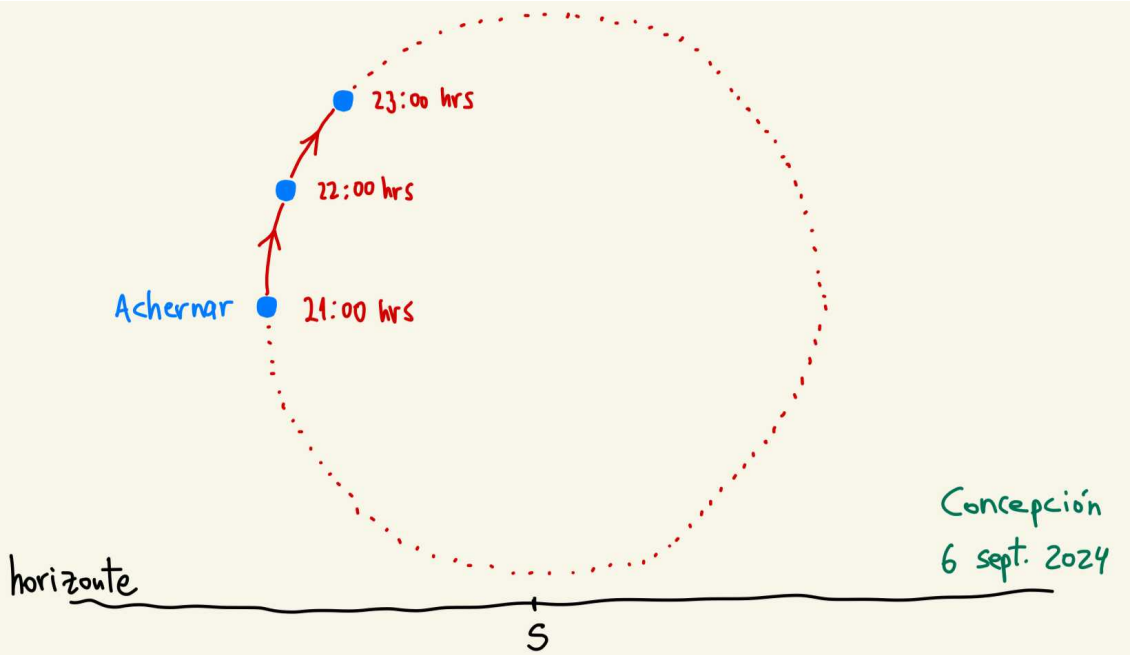
Imaginémonos que estamos en Concepción un día 6 de septiembre[23], y nuestro reloj marca las 16:00 hrs. Imaginemos también que tenemos a nuestra disposición una cómoda silla, sobre la cual nos sentaremos mirando en la dirección Sur. Aunque todavía hay Sol, con el pasar de las horas veremos cómo éste se esconderá bajo el horizonte cerca del Este. El cielo se empezará a oscurecer, y poco a poco observaremos cómo van apareciendo las estrellas.

[22] Aunque tenemos registros de que en la cultura china también fue desarrollada la esfera celeste, la tradición astronómica que estudiamos en el mundo occidental (y que intentamos abordar en esta actividad) se considera a sí misma heredera de la cultura griega. Por otro lado, las esferas celestes *materiales* más antiguas que se conservan hasta el día de hoy son de los siglos III-IV d.C. tanto del mundo greco-romano como de Asia Menor y de China. Para mayor información sugiero ver el hermoso libro de Nick Kanas *Star Maps. History, Artistry and Cartography* (2007), especialmente las páginas 227-229.

[23] El día 6 de septiembre de 2024 era la fecha oficial para realizar la actividad 3 de nuestro proyecto en la ciudad de Concepción, aunque por diversos motivos tuvimos que realizarla el 10 del mismo mes.

De todo el panorama estelar que tendremos frente a nosotros fijaremos nuestra atención en *Achernar*, estrella perteneciente a la constelación del *Erídano*, que aparecerá como a las 19:30 hrs un poco a la izquierda del Sur, y más o menos a 20° de altura.

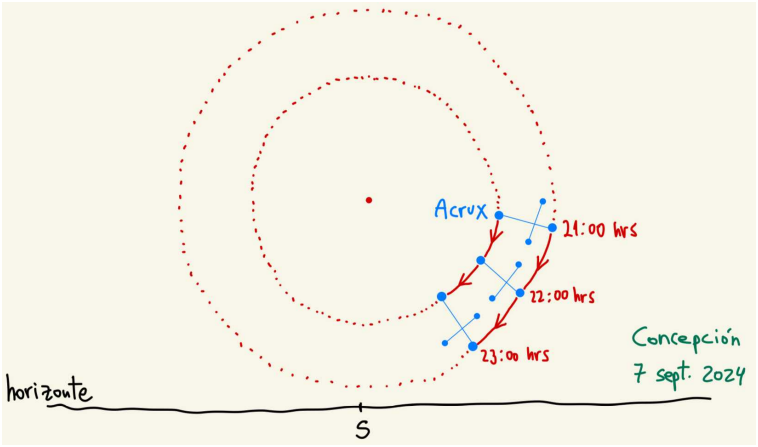
Sin quitarle la mirada a *Achernar*, observaremos que este puntito en el cielo no se queda fijo, sino que se va moviendo con el paso de las horas. Cuando sean las 21:00 hrs estará en un sitio del cielo; a las 22:00 hrs estará en otro, y así irá moviéndose hasta que la luz del amanecer del día siguiente *la vuelva invisible*. Lo más interesante de la trayectoria de esta estrella es que no es una línea recta, ni tampoco es un movimiento errático o irregular, sino que va trazando ***un círculo en el cielo***.



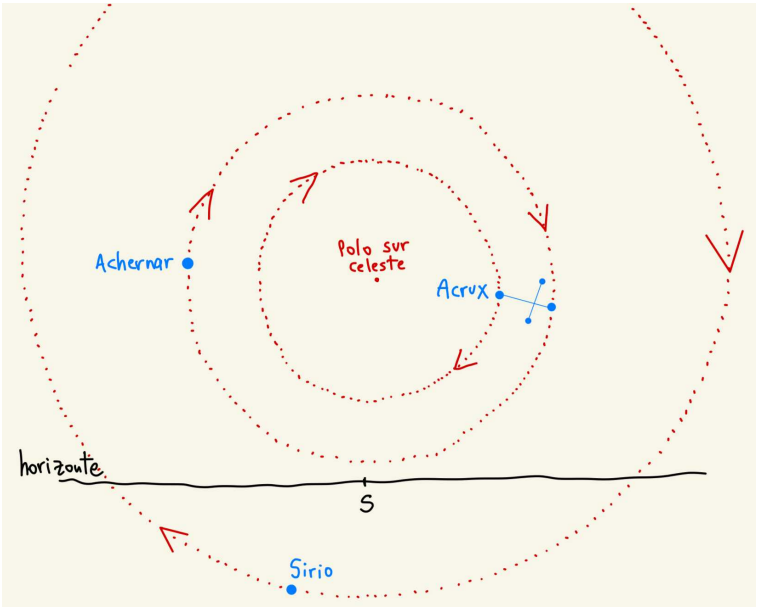
Evidentemente no podremos ver este círculo completo en el firmamento, ya que cuando amanece la estrella se vuelve invisible y es imposible seguirle el rastro. A pesar de ello, lo más razonable es suponer que sigue girando en el cielo en el mismo círculo que lo venía haciendo, para reaparecer girando sobre este a la noche siguiente.

No contentos con este bello descubrimiento, repetiremos el experimento la noche inmediatamente posterior. Para ello nos mantendremos siempre mirando al Sur, pero esta vez concentraremos nuestra atención en las 4 estrellas principales de la constelación de la *Cruz del Sur*, cuya punta es la estrella *Acrux*. Observaremos, en concordancia a lo visto la noche anterior con *Achernar*, que cada una de sus 4 estrellas principales se mueve en un círculo.

Pero lo verdaderamente sorprendente no es tanto que estas estrellas también se muevan en círculos (aunque realmente sí sea sorprendente), sino que ***todos estos círculos tienen exactamente el mismo centro***.



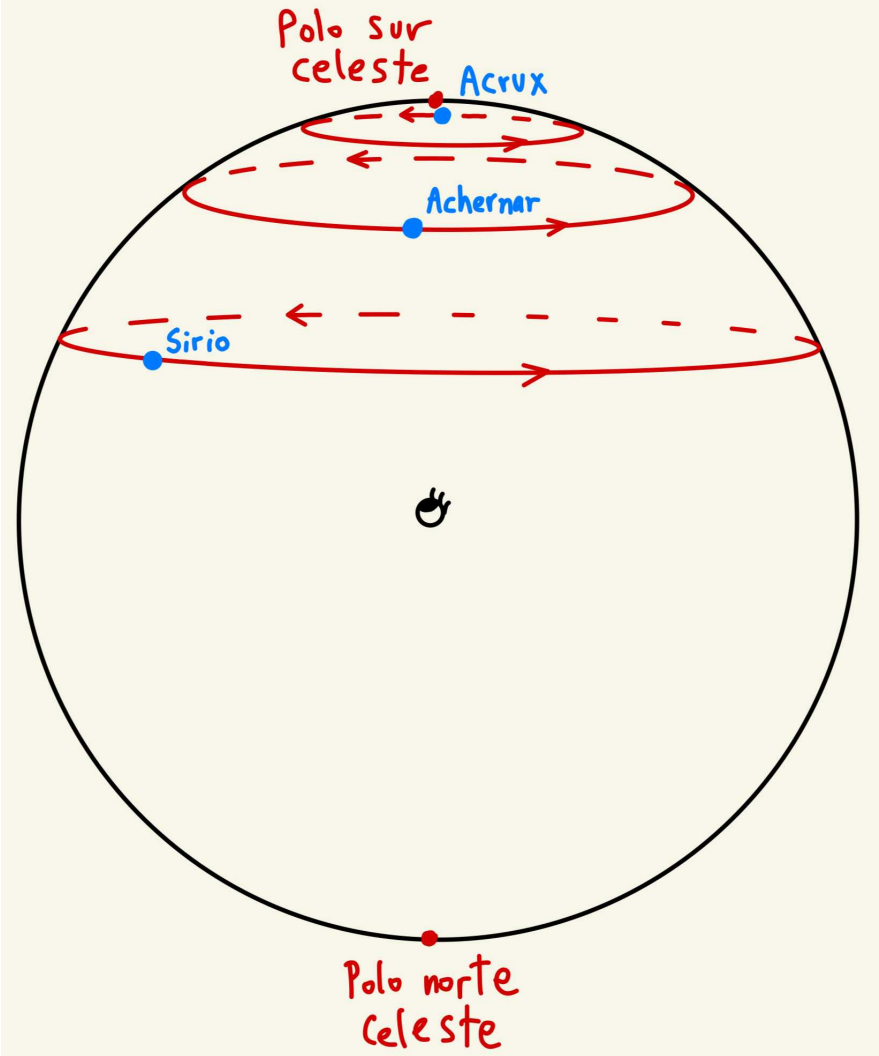
No es difícil en estos momentos pensar que no solamente esas 5 estrellas (*Achernar* y las 4 de la *Cruz del Sur*) se mueven al mismo ritmo y formando círculos concéntricos en el cielo, sino que absolutamente todas las estrellas del cielo lo hacen, incluso aquellas que podemos ver solo parcialmente (por esconderse bajo el horizonte en ciertos momentos del año, como la estrella *Sirio* que hemos destacado en la imagen de abajo). Esto podría parecer una afirmación un poco apresurada, pero lo cierto es que meses de observación y paciencia la podrían corroborar sin problema.



Y como los círculos más cercanos a dicho centro tienen radios cada vez más pequeños, entonces es lógico concluir que el propio centro de esas trayectorias está completamente inmóvil en dicha danza de las estrellas. A dicho punto fijo en el cielo lo llamamos *polo sur celeste*, por estar en el hemisferio sur[24].

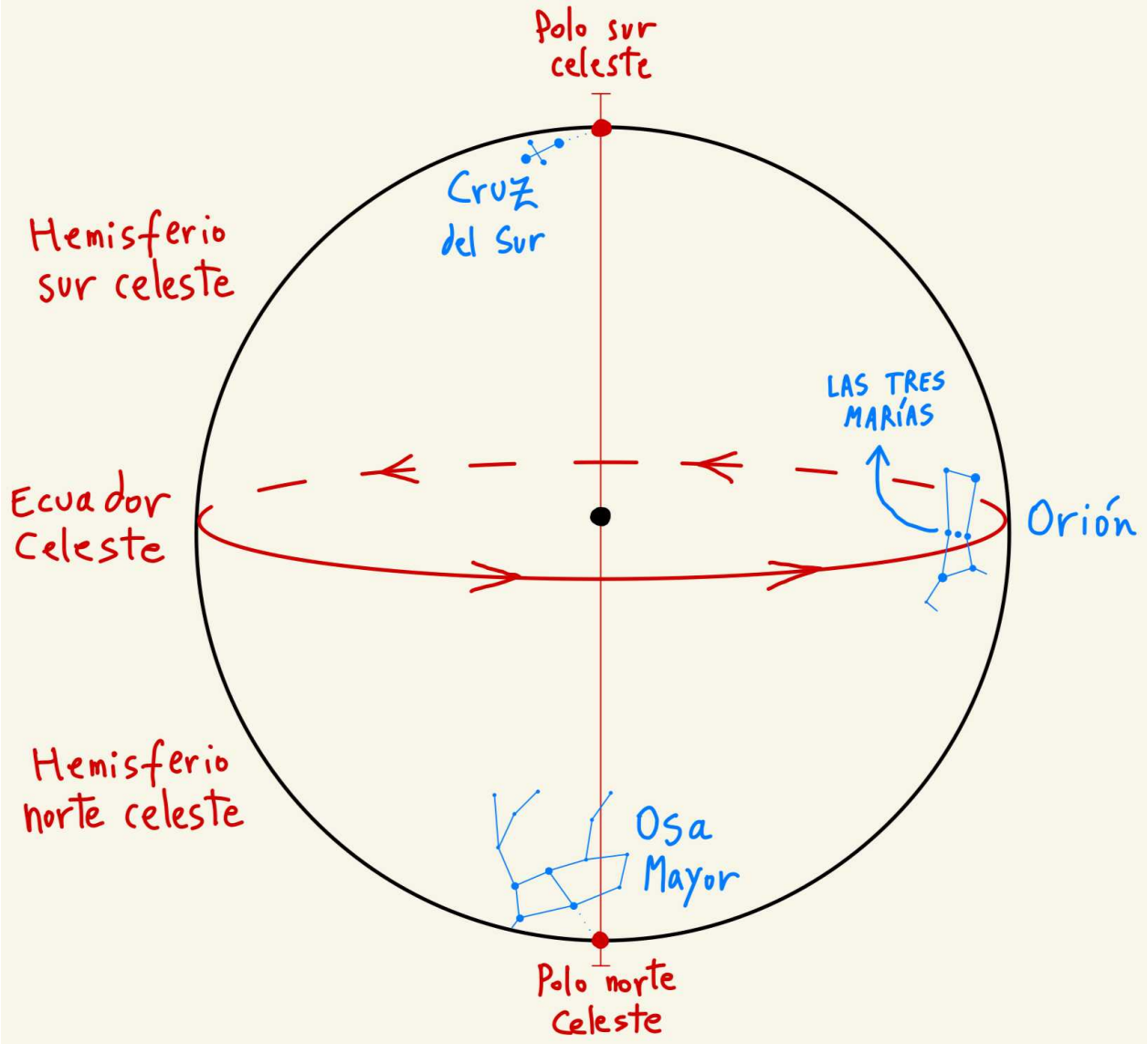
[24] En el hemisferio sur de nuestro planeta tenemos que el "centro fijo" es el polo sur celeste, mientras que en el hemisferio norte terrestre el punto fijado será el polo norte celeste. En el caso de Concepción, ubicado en el hemisferio sur del planeta, no hay ninguna estrella notable en el polo sur celeste, mientras que en el hemisferio norte sí hay una (muy cerca): *Polaris*.

Este movimiento circular y coordinado de las estrellas es el que nos lleva, de manera natural, a imaginar que el firmamento es verdaderamente una enorme esfera, en la cual las estrellas son pequeños puntos brillantes pegados a su superficie, como si fueran de plasticina fosforecente. Y es desde el centro de dicha esfera desde el cual observamos el cielo girar.



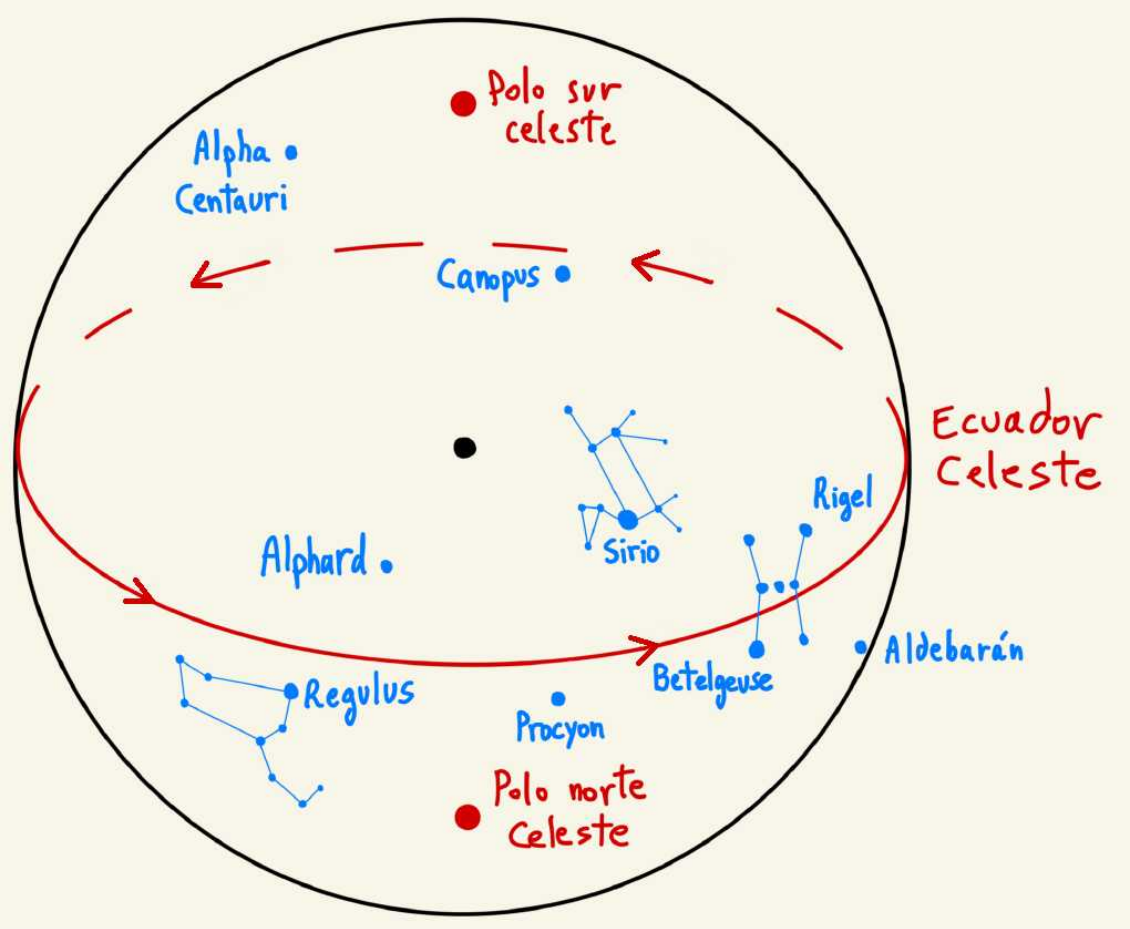
¿Qué hemos aprendido hasta este punto? Que es completamente razonable imaginar que el cielo es una enorme esfera con las estrellas "pegadas" en su superficie, y que esta gira a ritmo constante en relación a su eje, que no es más que la línea imaginaria que une sus polos. En la superficie de esta esfera podemos observar las diversas estrellas que conforman el hermoso panorama del cielo.

Para ir interiorizando esta esfera y su superficie estrellada es conveniente tener siempre en mente algunas constelaciones esenciales, como por ejemplo la *Osa Mayor* en el hemisferio norte de la esfera celeste; la *Cruz del Sur* en su hemisferio sur; y sobre el círculo que atraviesa esta esfera por la mitad, que llamaremos *Ecuador Celeste*, tenemos la constelación de *Orión*[25].



[25] Que tiene al medio a "Las Tres Marías", llamado también "Cinturón de Orión".

A continuación tenemos una imagen de la misma esfera celeste (una de sus caras) sobre la cual destacamos algunas estrellas presentes en el astrolabio, instrumento que estudiamos en la actividad 1. Con esto damos por terminado nuestro primer experimento mental[26].



Ahora pensemos un poco. Si todo este asunto del cielo esférico solamente tuviera estrellas, y no hubiera ni Sol ni Luna ni planetas ni ninguna otra cosa más, entonces con el simple hecho de mirar hacia arriba veríamos siempre estos puntitos brillantes girar incesantemente todo el tiempo, sin parar nunca, en una eterna noche estrellada y rotatoria. Pero claramente esto no es lo que observamos en el firmamento, ya que si bien existe la noche, evidentemente también existe el día. Esto es así porque existe un objeto especial, el Sol, quien con su presencia en el cielo nos *impide* ver las estrellas que están en la misma porción del firmamento que él.

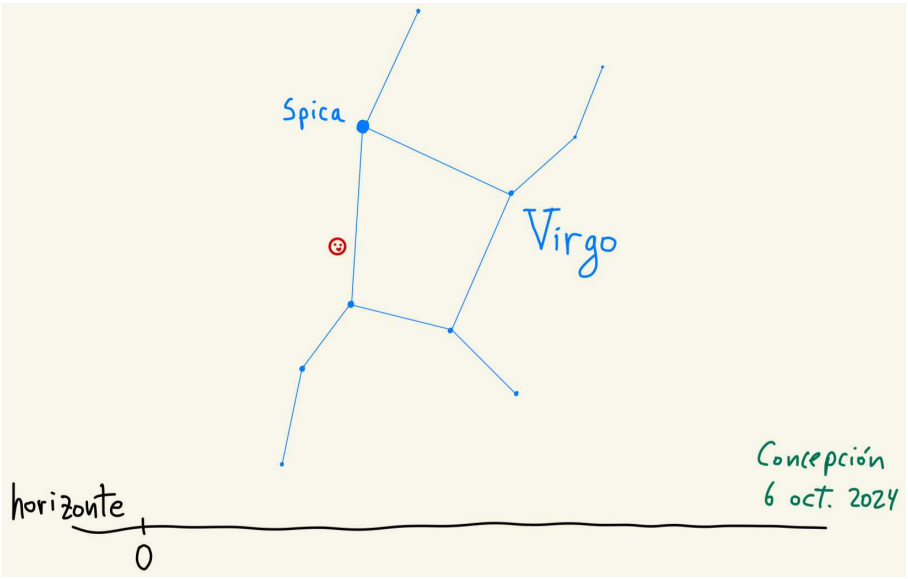
El brillo del Sol vuelve invisible el brillo de las estrellas que están cerca de él en el cielo. Por ello solo cuando se esconde el primero existe la posibilidad de observar estas últimas con claridad.

[26] Actualmente sostenemos que, en vez de considerar una Tierra quieta desde la que observamos el giro de las estrellas pegadas en una esfera, debemos considerar que dicho movimiento es consecuencia del giro de nuestro propio planeta.

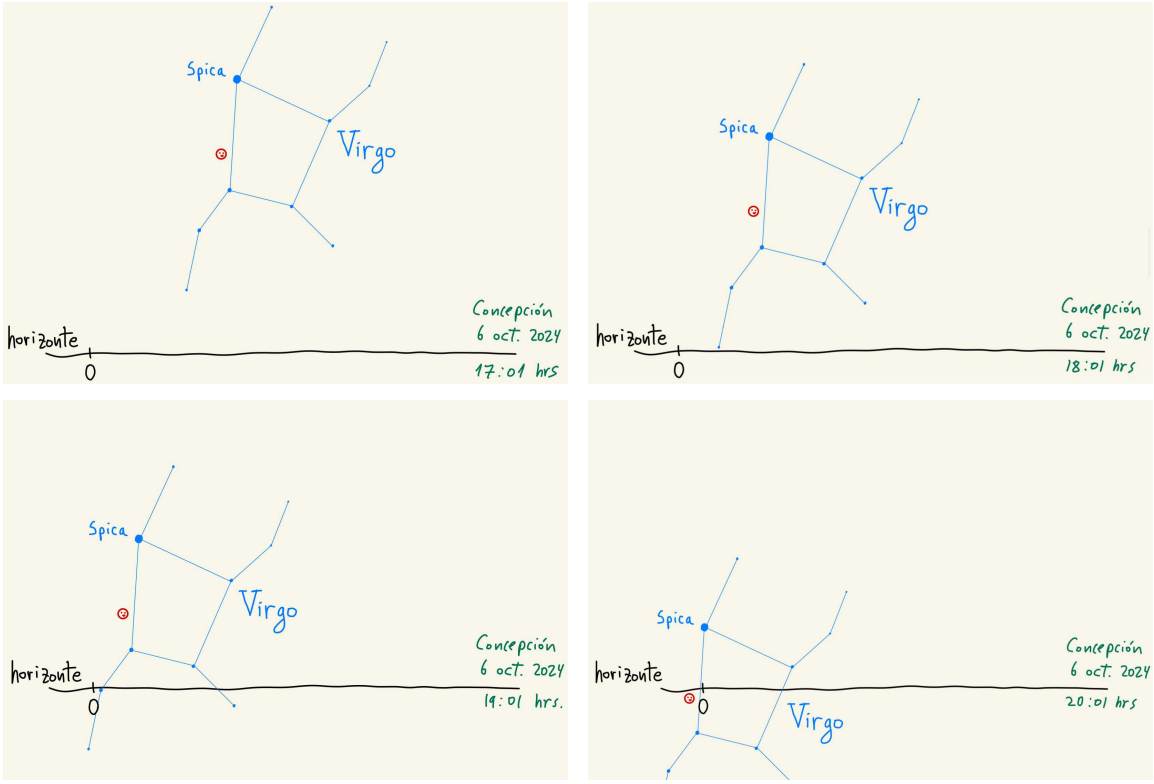
El Sol, entonces, es quien define con su ausencia cuáles estrellas podremos ver de noche, y eso dependerá del lugar del cielo en que se encuentre. ¿Y dónde está el Sol en relación a las estrellas? El asunto central aquí es que el Sol gira ***casi*** coordinadamente con ellas, pero sucede que día tras día se va "retrasando" con respecto al giro de la esfera celeste, cosa que comprenderemos mejor a través de un segundo experimento mental.

III. Segundo experimento mental: la eclíptica

Imaginémonos que seguimos en Concepción un mes después del experimento mental anterior. Es un día 6 de octubre, y esperamos pacientemente a que nuestro reloj marque las 16:00 hrs. Con mucho esfuerzo nos imaginaremos que, en el transcurso de solo 1 minuto a partir de las 16:00 hrs, el Sol bruscamente comienza a disminuir su brillo hasta ***casi*** apagarse. Ahora son las 16.01 hrs, y todo ha cambiado: ha anochecido, ya que en estos momentos el Sol posee un brillo como cualquier otra estrella, de tal manera que es prácticamente indistinguible de ellas (en el dibujo abajo es una pelotita roja con cara, mientras que las estrellas "normales" son puntos azules). Como ya no deslumbra, es posible mirar hacia arriba sin destruir nuestros ojos, y podremos observarlo a él y simultáneamente a las anteriormente opacadas estrellas. ¿En qué parte del cielo estará? Dicho día 6 de octubre el Sol está "descansando" en la constelación de *Virgo*. La belleza del panorama sobre nosotros nos obliga a tomar una fotografía de la posición del Sol con una *Polaroid*, y guardaremos la instantánea en nuestro bolsillo.

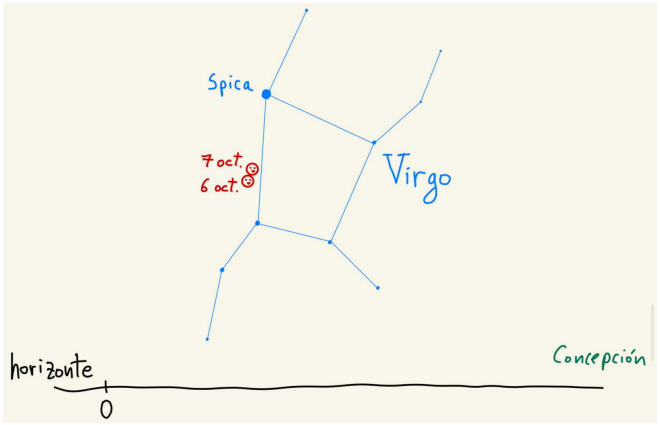


Ahora nos sentamos en la misma cómoda silla del experimento mental anterior para apreciar el cielo, y tranquilamente observaremos cómo este ya-no-tan-brillante Sol se mueve en conjunto con las estrellas, rotando desde el Este al Oeste en la esfera celeste, y *aparentemente* al mismo ritmo que ellas. Las imagenes abajo muestran su posición en el cielo a las 17:01, 18:01, 19:01 y 20:01 hrs, aproximándose la constelación de *Virgo* y el propio Sol a sus puestas por el Oeste. Podemos ver que poquito antes de las 20:01 hrs el Sol ya se escondió bajo el horizonte.



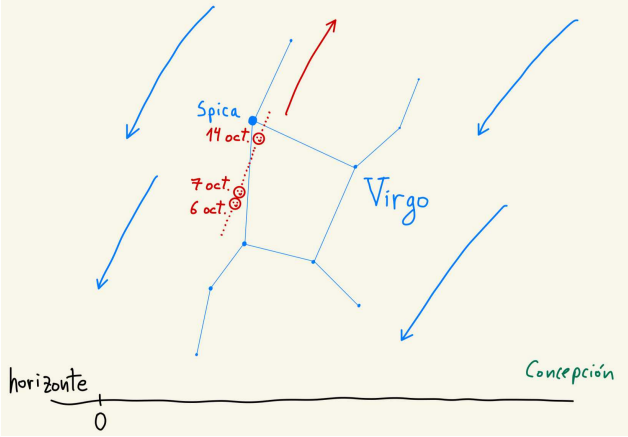
En este experimento sí que tenemos una noche eterna con estrellas girando sin parar, pero la diferencia con la situación que mencionábamos antes es que ahora el Sol (disminuido en su brillo) se nos coló en el panorama del cielo, con un movimiento aparentemente inofensivo.

Con mucha paciencia esperaremos a que el Sol haga su recorrido hasta el día siguiente, el 7 de octubre, con la intención de ver si todavía sigue en el mismo lugar sobre la constelación de *Virgo*. Lo sorprendente de esto es que, aunque está en un lugar muy parecido al del día anterior, no está exactamente en la misma posición. Para comprobarlo tomamos una nueva instantánea del cielo, y la comparamos con la que tomamos ayer.

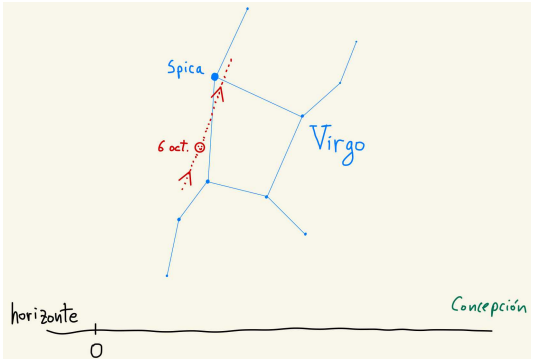


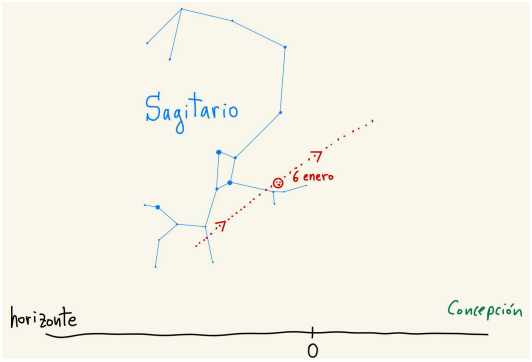
Esto significa que el Sol se mueve ***casi*** en coordinación con el resto de las estrellas, realizando con el paso de los días un camino propio en el firmamento.

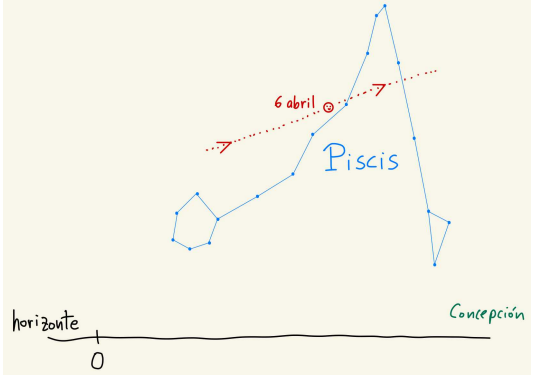
Como la diferencia entre las imágenes del 6 y 7 de octubre es pequeña, pero ligeramente perceptible, entonces esperaremos una semana más para verificar si el Sol se ha seguido moviendo. Por ello el día 14 de octubre volvemos a mirar dónde está el casi-apagado Sol, ¡y vemos que efectivamente se ha movido bastante en relación al resto de las estrellas!

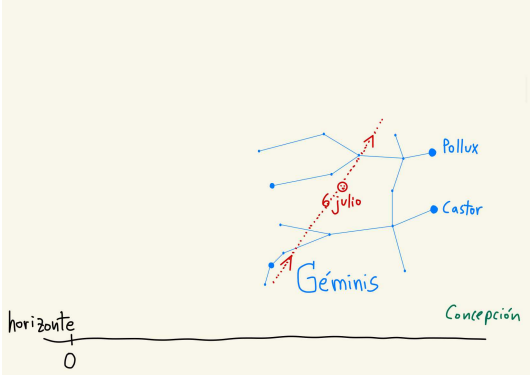


Si seguimos haciendo este experimento durante el resto del año, veríamos cómo el Sol va "viajando" por ciertas constelaciones, *hasta volver a exactamente el mismo punto del cielo donde tomamos la primera foto con la Polaroid*. Esta coincidencia se dará 1 año después, el 6 de octubre del 2025, momento en que el Sol habrá completado un ciclo entero en el cielo. Las imágenes abajo muestran algunos días específicos del año separados por 3 meses, para así poder ver una parte de este viaje anual del Sol en el firmamento.

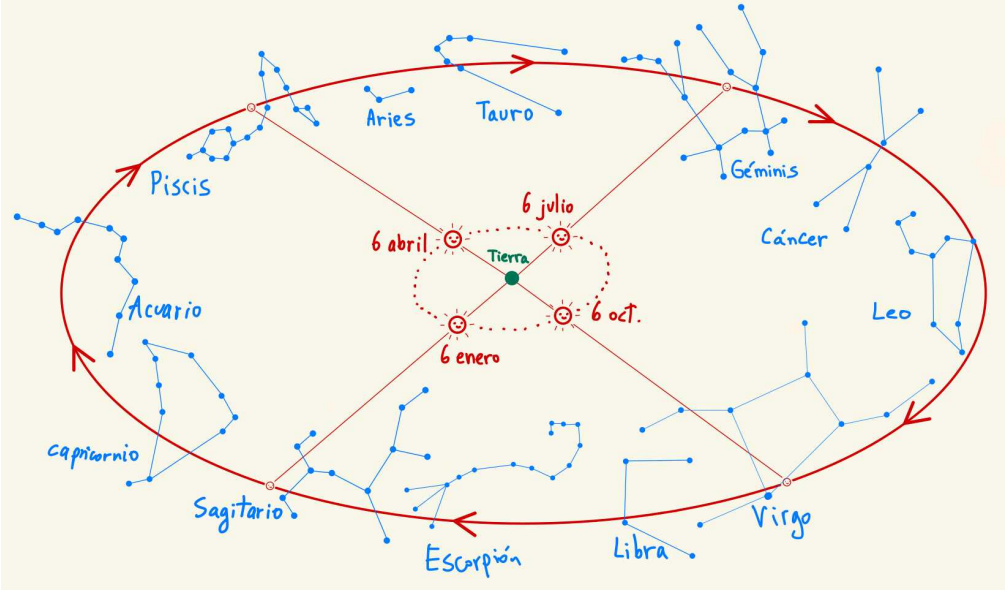


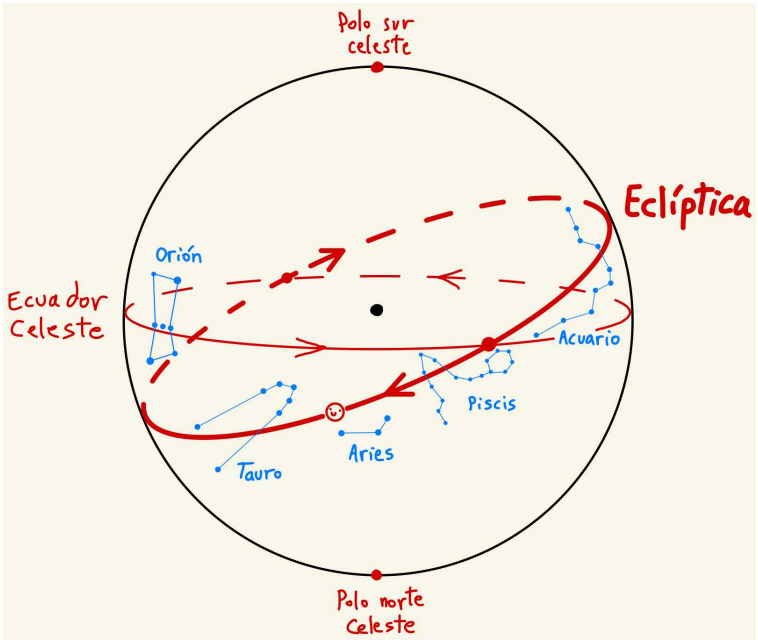






Las constelaciones que recorre el Sol en el cielo durante esta trayectoria anual son las que denominamos *constelaciones zodiacales*, según podemos ver en las imágenes de abajo. Y si pudiéramos dibujar sobre la esfera celeste dicha trayectoria cíclica, trazaríamos un círculo el cual llamaremos *Eclíptica*.

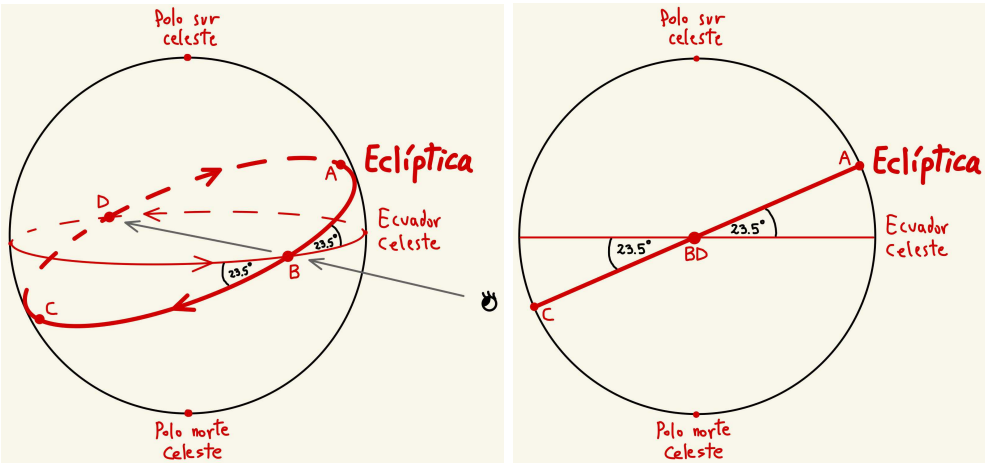




Podemos observar que este movimiento es muy lento, ya que para recorrer el círculo completo con sus 360°, el Sol tarda 365 días, lo cual nos indica que este se mueve un poquitito menos de 1° por día sobre este círculo. No olvidemos que cada día del año está representando por exactamente 1 punto de este círculo de la eclíptica, por lo tanto, si estudiamos el movimiento del Sol un cierto día, debemos saber dónde ubicarlo sobre ella y ahí hacer girar la esfera celeste.

Es fundamental comprender que podemos separar el movimiento del Sol en dos movimientos distintos y simultáneos. Por un lado, el movimiento diario del Sol consiste en el viaje que hace durante un día específico por el firmamento, que va casi al unísono con las demás estrellas, y en ese sentido el Sol se mueve esencialmente como una estrella más. Por otro lado, el movimiento anual del Sol consiste en su viaje a través de las constelaciones, cuyo ciclo dura 1 año completo y su sentido es opuesto al giro de las estrellas. Por ello es que, cuando comparamos lo visto el 6 y el 7 de octubre durante este experimento mental, vimos que el Sol, a pesar de girar "a la par" con las demás estrellas, "subió" un poquito en ese tramo de 1 día, siendo que las estrellas iban "bajando". Con esto damos por terminado nuestro segundo experimento mental[27].

Ahora ahondaremos en algunos números relativos a la eclíptica. Notemos que en la imagen anterior el círculo de la eclíptica está "chueco" con respecto al ecuador celeste, y es posible determinar que el ángulo de esta inclinación es igual a 23.5°, lo cual queda claro en las dos perspectivas expuestas en la imagen de abajo.



Observemos que en las imágenes anteriores hay 4 puntos especiales en la eclíptica:

(1) El punto más cercano al polo *sur* celeste (que llamamos A) es el *solsticio de verano del hemisferio sur*, que sucede el 21 de diciembre.

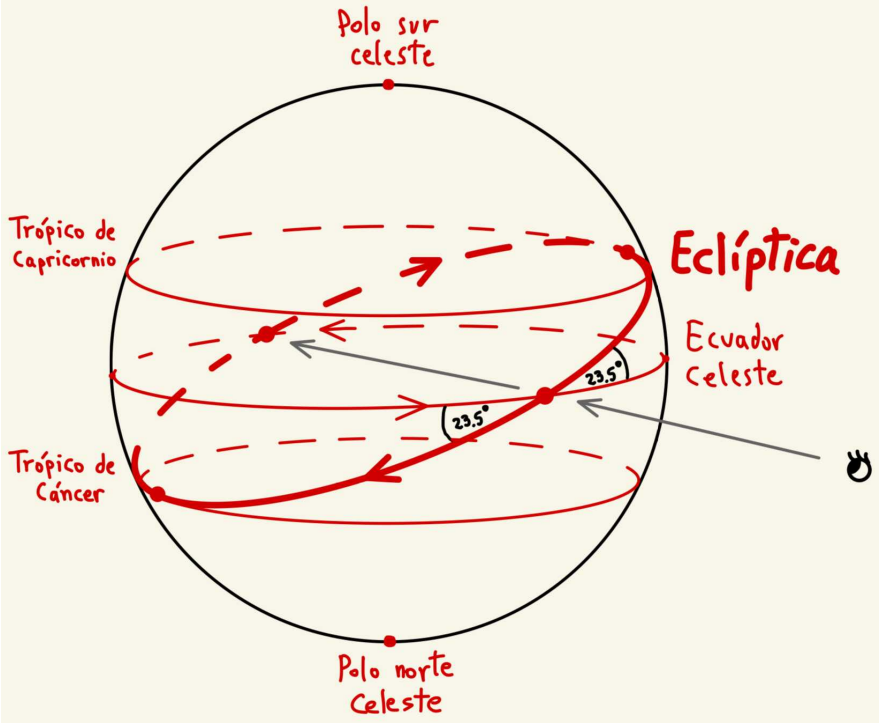
(2) El punto más cercano al polo *norte* celeste (que llamamos C) es el *solsticio de invierno del hemisferio sur*, que sucede el 21 de junio.

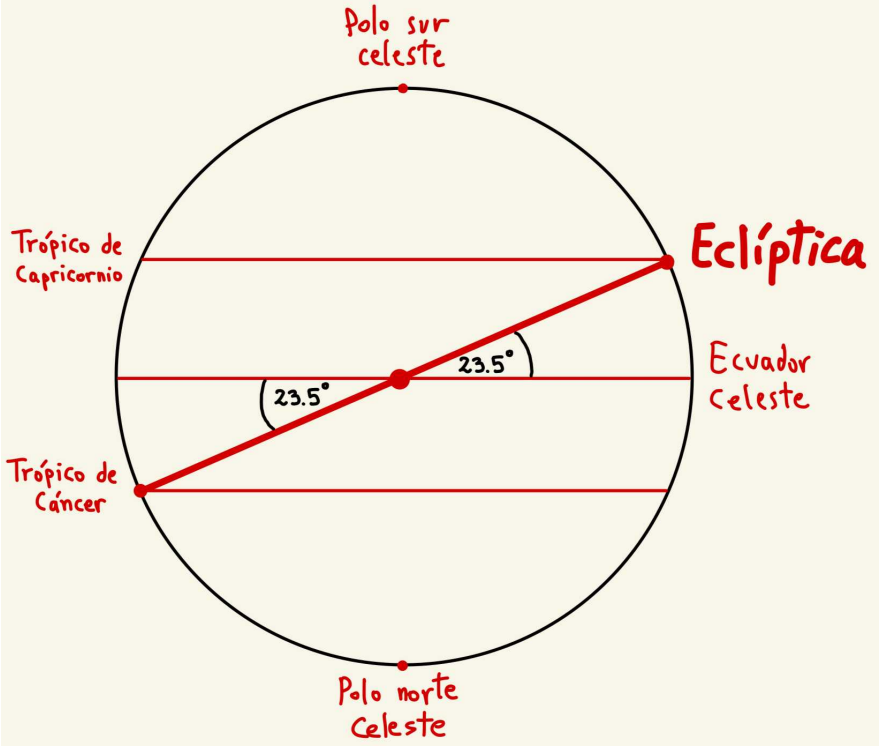
(3) El punto en el ecuador celeste donde el Sol cruza desde el hemisferio sur al hemisferio norte (que llamamos B) es el *equinoccio de otoño del hemisferio sur*; que sucede el 21 de marzo.

(4) El punto en donde el Sol pasa del hemisferio norte al hemisferio sur (que llamamos D) es el *equinoccio de primavera del hemisferio sur*, que sucede el 21 de septiembre.

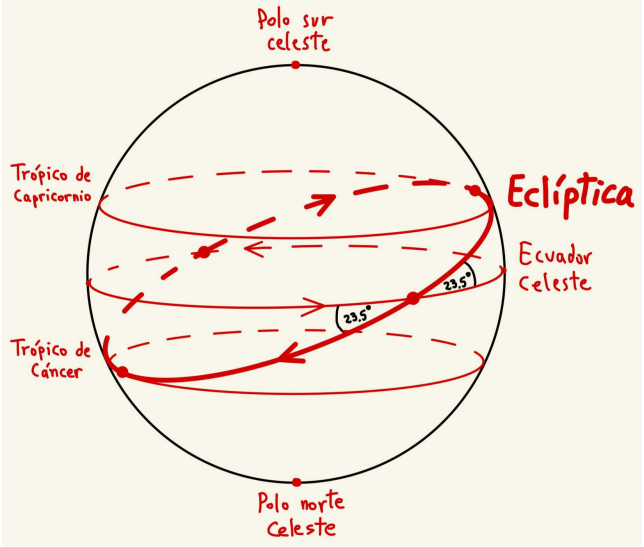
[27] Actualmente sostenemos que el "movimiento diario del Sol" del que hemos hablado es realmente producto del giro de rotación de nuestro propio planeta, mientras que el "movimiento anual del Sol" es realmente producto del movimiento anual de traslación de la Tierra alrededor de nuestro astro. En la última actividad hablaremos sobre esto.

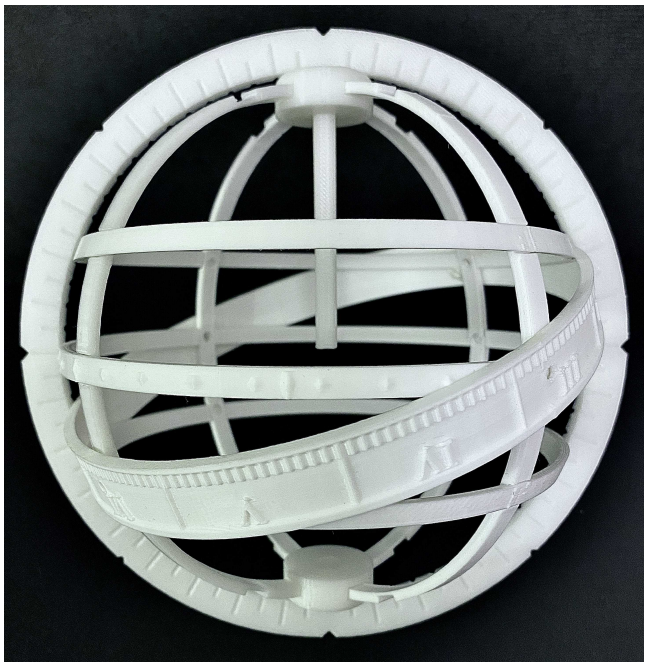
Si trazamos un círculo sobre la esfera celeste que sea paralelo a su ecuador, y que pase por el solsticio de verano del hemisferio sur, obtenemos el *trópico de capricornio*, mientras que si pasa por el solsticio de invierno del hemisferio sur obtendremos el *trópico de cáncer*.





Una manera de visualizar de manera concreta la construcción matemática que acabamos de realizar de la eclíptica y sus trópicos en la esfera celeste es observar la esfera rotatoria de la esfera armilar que ya hemos estudiado, como en la imagen siguiente.

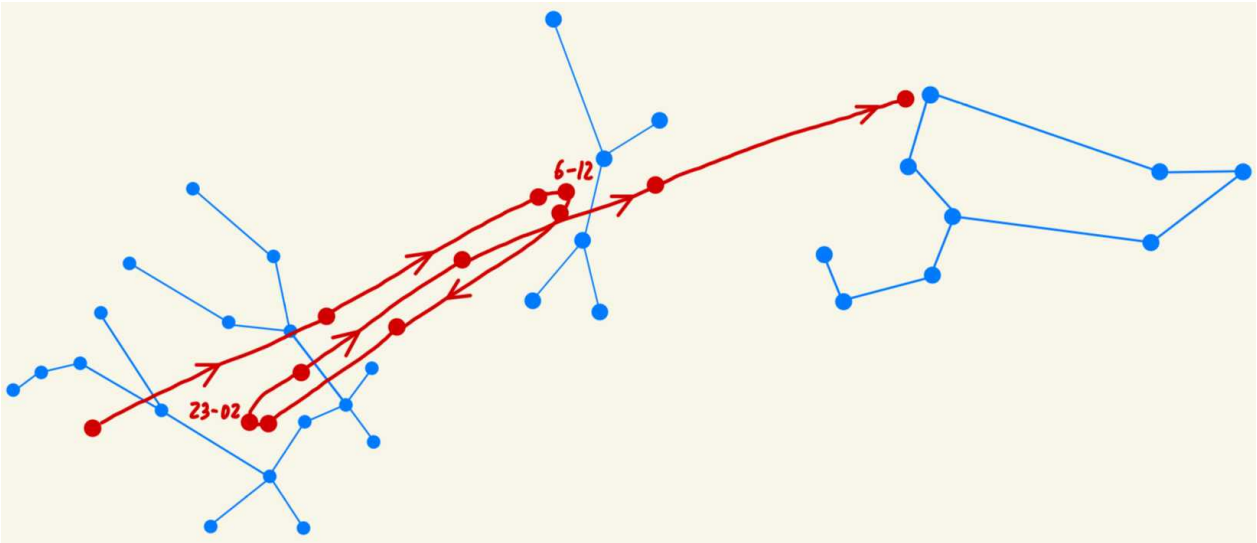




En este punto ya debiéramos estar convencidos de que es completamente razonable considerar que las estrellas y las constelaciones asociadas giran coordinadamente trazando círculos en el cielo, "incrustadas" en la superficie de una enorme esfera que hemos llamado esfera celeste. Por otro lado, hemos descubierto que el Sol describe en relación a dicha esfera una trayectoria circular llamada eclíptica, que tiene una inclinación de 23.5° con respecto al ecuador de dicha esfera, limitada por los trópicos de cáncer y capricornio. Finalmente, hemos visto que el movimiento del Sol en el círculo de la eclíptica es opuesto al movimiento de las estrellas que giran en el cielo, por ello decimos que el Sol se va "retrasando" poco a poco en relación al movimiento de estas.

Aunque esta esfera matemática nos permita estudiar el movimiento de las estrellas y el Sol, podríamos preguntarnos: ¿qué pasa con otros objetos del cielo, como por ejemplo los planetas o la Luna? Para contestar esto debemos confesar que la cosa aquí se vuelve bastante más compleja de lo que hemos hecho para las estrellas y el Sol. Ya hemos visto que el experimento mental 1 nos muestra que el movimiento de las estrellas es muy simple, ya que son humildes círculos que pueden ser modelados como parte de la superficie de una esfera. Por otro lado, el experimento mental 2 nos muestra que la trayectoria del Sol calza bien en dicha esfera, básicamente porque va cruzando las constelaciones zodiacales una tras otra de manera "lineal", constante y predecible, formando la eclíptica.

Cosa distinta sucede con los planetas. Aunque sus movimientos en la esfera celeste sucedan relativamente cerca de la eclíptica, su trayectoria en la esfera celeste realiza cada cierto tiempo un "retroceso", para luego volver a su trayectoria original, en lo que llamamos *la retrogradación de los planetas*. Aquí abajo ejemplificamos con una retrogradación del planeta *Marte* que transcurre entre 2024 y 2025, cuya trayectoria "a la larga" es similar a la del Sol (cruzando las constelaciones Géminis, Cáncer y Leo), pero que tiene un "retroceso y arreglo" que transcurre entre el 6 de diciembre de 2024 y el 23 de febrero de 2025. Ese "estancamiento" entre las constelaciones de Géminis y Cáncer claramente no sucedía con el Sol, ya que este las cruza a paso firme y constante, sin nunca retroceder.



El movimiento de la Luna, por su parte, es también muy complejo de estudiar, y por ello los instrumentos que hemos estudiado no la incluyen[28].

[28] Existen instrumentos que intentan emular los movimientos de estos objetos, como por ejemplo: (1) El precioso astrolabio del astrónomo Muhammad Ibn Abi Bakr, hecho en Isfahan en el año 1221, conservado en el Museo de Historia de la Ciencia de la Universidad de Oxford (Inglaterra), el cual emula en su parte trasera *las fases de la Luna* con un mecanismo de engranajes; o (2) El *ecuatorio* sin autor conocido del año 1600, conservado en el World Museum de Liverpool, que nos permite ver el movimiento de los planetas, el Sol y la Luna mediante un arreglo de engranajes y círculos. Ambos instrumentos son extremadamente interesantes, pero escapan por mucho a lo que queremos abordar en este proyecto.

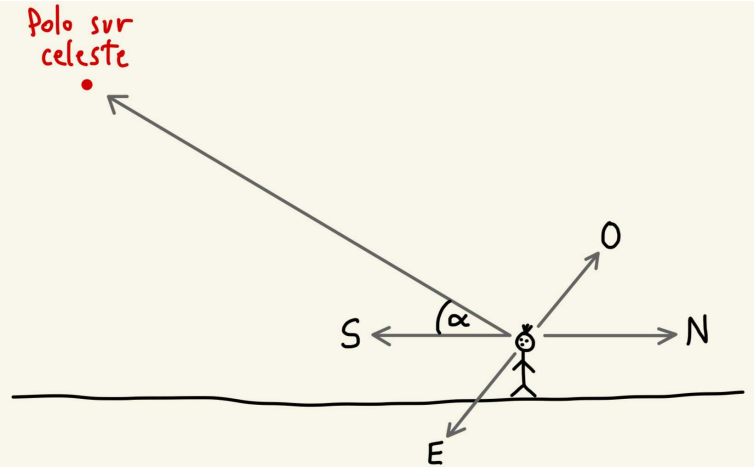
Bien. Ya hemos comprendido que de las muchas cosas que hay en el cielo estudiaremos solamente las estrellas y el Sol, y en particular ahora nos enfocaremos exclusivamente en la relación que existe entre la posición de un observador *en un determinado lugar de nuestro planeta* y el movimiento de estos objetos que aquel puede observar desde ahí. Debemos tener en cuenta que en distintos lugares del planeta se ven distintas estrellas, siendo algunas de ellas imposibles de visualizar en ciertas latitudes. Y lo mismo sucede con el Sol: su salida y su puesta van variando con la latitud, habiendo algunos sitios donde derechamente no sale o no se pone durante todo el día.

Por estas razones ahora nos dedicaremos a comprender la importancia de la latitud en la que estemos ubicados en nuestro planeta a la hora de observar el cielo. Para ello realizaremos nuestro último experimento mental.

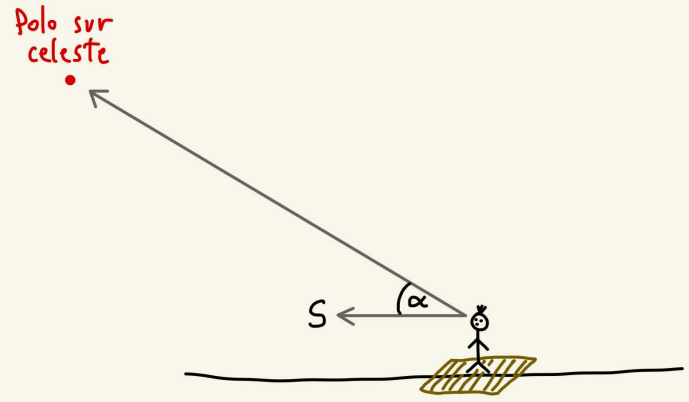
IV. Tercer experimento mental: el horizonte

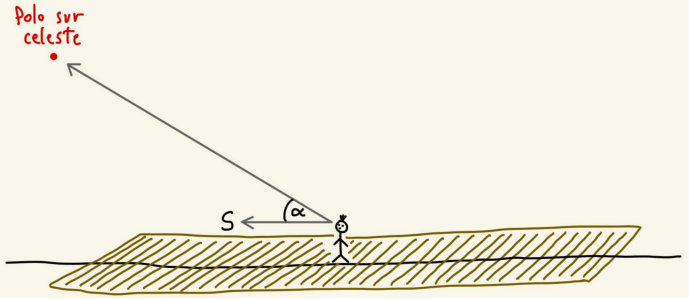
Ya hemos visto que la esfera celeste, aunque gire infinitamente sobre su eje a ritmo constante y todo parezca moverse, existen sobre ella dos puntos que se mantienen estáticos a pesar del giro: los polos celestes. Como estamos en el hemisferio *sur*, entonces el único punto en nuestro cielo que se mantendrá estático será el *polo sur celeste*. Dirijamos, entonces, nuestra mirada a dicho punto, con lo cual estaríamos también mirando la dirección Sur en nuestro horizonte. Con la dirección Sur ya identificada tenemos, tomando su opuesto, la dirección Norte, y en consecuencia, también el Este y el Oeste en el horizonte.

Y si no nos movemos nosotros, tampoco se moverán ni el polo sur celeste ni el horizonte, y por lo tanto tenemos que el ángulo que forman nuestros ojos, la dirección Sur y el polo sur celeste es un ángulo invariable, constante, permanente. Por ser siempre el mismo, le pondremos por nombre α.

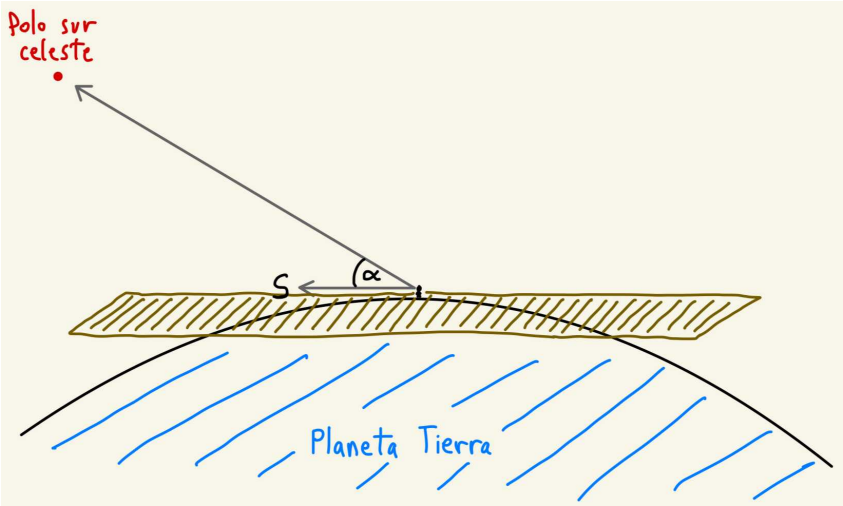


Con lo anterior en mente, imaginemos ahora que estuvieramos encima de una pequeña alfombra cuadrada, la cual de un momento a otro empieza a crecer en todas sus direcciones. Al inicio medirá un par de metros, y todavía podremos ver su borde medianamente cerca.

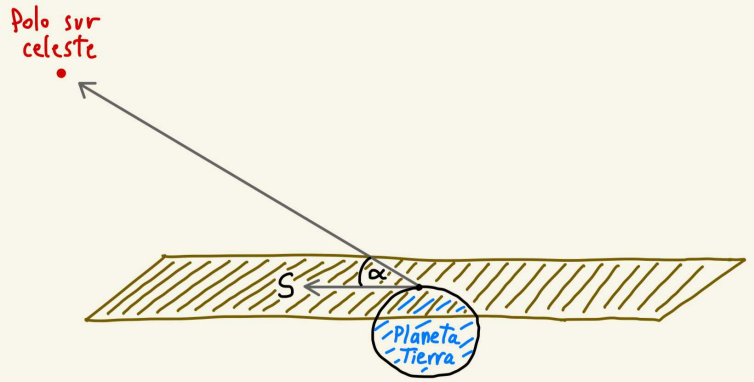


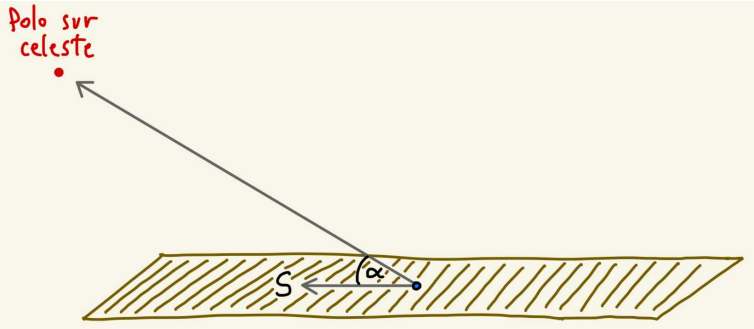


A medida que sigue aumentando de tamaño llegará a medir kilómetros, y claramente será inabarcable para la vista. Por ello nos imaginaremos que podemos mirar nuestro planeta "desde afuera", para así poder seguir viendo cómo crece esta alfombra cuadrada, y así observaríamos que aquella no es nada más que un plano que toca en solamente 1 punto a la esfera de la Tierra, justo a nuestros pies.

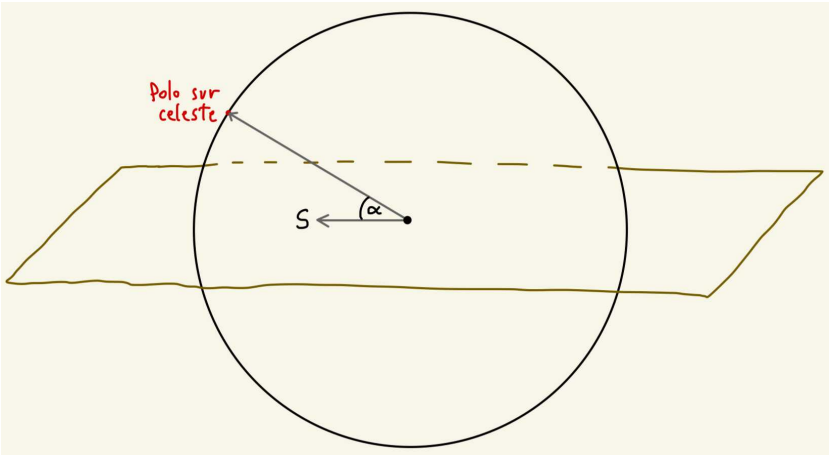


Mientras más aumenta el tamaño de este plano-alfombra, más lejos debemos ponernos para poder apreciar sus dimensiones, y por ello más pequeño se verá nuestro planeta. Llegará un momento en que éste no será más que un punto, y claramente nosotros, como observadores, también nos volveríamos infinitamente pequeños desde esta mirada extra-terrestre.





Y así la alfombra-plano seguirá creciendo, abarcando más y más espacio, hasta que llegue el momento en que atraviese a la esfera celeste. No olvidemos que el radio de la esfera celeste es igual a la distancia entre la Tierra y las estrellas, las cuales están extremadamente lejos de la Tierra, por ello es tan necesario que la alfombra tenga que crecer a unas dimensiones tan groseramente enormes para conseguir intersectar esta esfera.



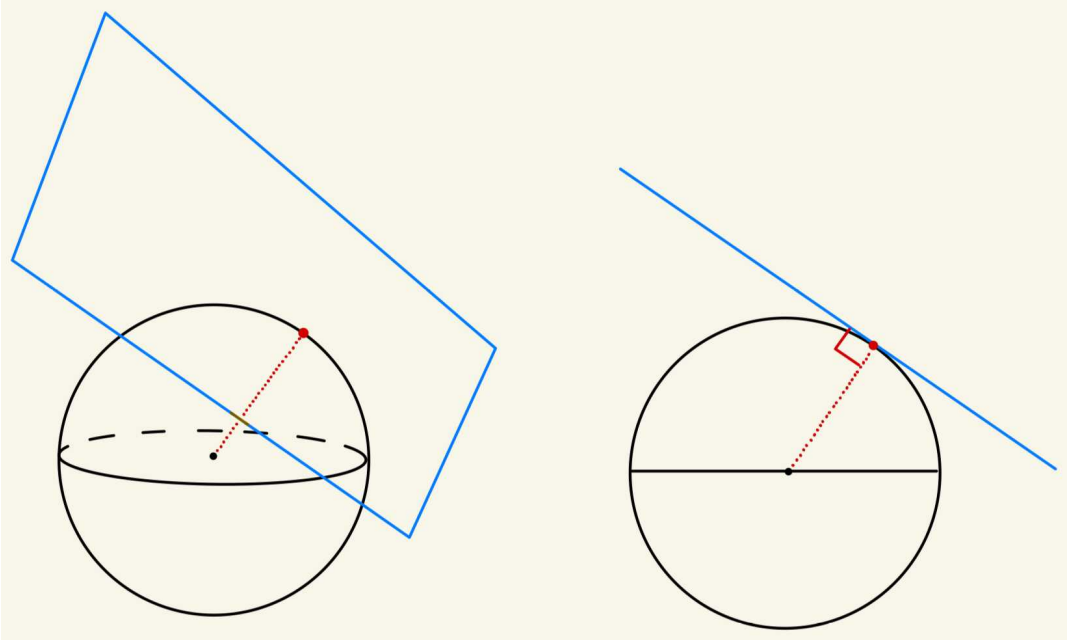
Podemos extraer varias cosas interesantes de este experimento. En primer lugar, la alfombra-plano se vuelve indistinguible de nuestro horizonte, ya que la distancia que separa nuestros ojos (el horizonte real) de nuestros pies (la alfombra), que es menor que 2 metros, es absolutamente insignificante en relación al radio de la esfera celeste, que es la distancia entre la Tierra y las estrellas. Por ello podemos considerar que esta alfombra, en este modelo matemático, es esencialmente lo mismo que nuestro horizonte, y con ella dividiremos la esfera celeste en dos hemisferios, siendo uno de ellos la cúpula celeste que hemos estudiado en nuestras actividades anteriores.

En segundo lugar, podemos visualizar nuestro planeta Tierra como una pequeñísima esfera que comparte el mismo centro que la enorme esfera celeste que lo contiene. En términos prácticos podemos pensar que el radio de la esfera celeste es infinitamente mayor que el radio de la esfera terrestre, o sea, nuestro planeta es un punto al centro de la esfera celeste.

En tercer lugar, el ángulo α que forman el polo sur celeste, el observador y la dirección Sur se mantuvo completamente invariable en todo este experimento.

En cuarto lugar, podemos ver qué sucede exactamente cuando el plano del horizonte atraviesa a la esfera celeste, y para ello veremos el caso general de cómo interactúan un plano matemático con una esfera matemática. Existen 2 posibilidades:

Caso 1. La esfera y el plano se cortan en exactamente 1 punto. En este caso decimos que el plano es *tangente* a la esfera, y se cumple que el plano y el radio de la esfera que une su centro con el punto de toque forman un ángulo de 90°.

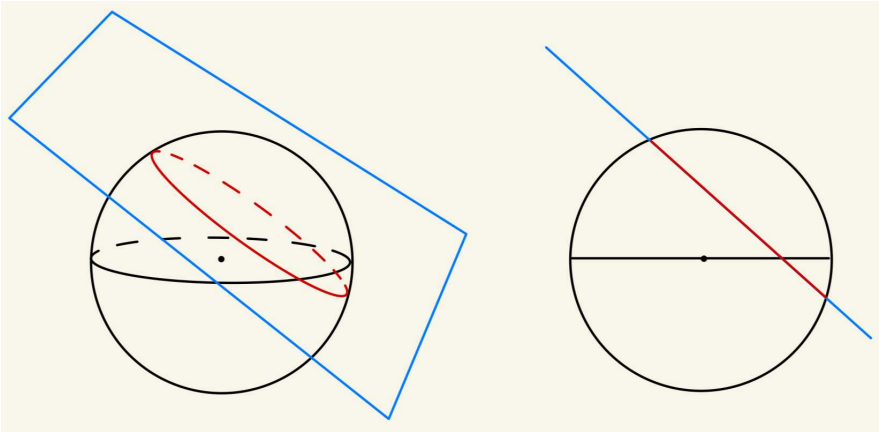


Caso 2. La esfera y el plano se cortan en más de 1 punto. Este caso es muy interesante, porque se separa en dos casos equivalentes:

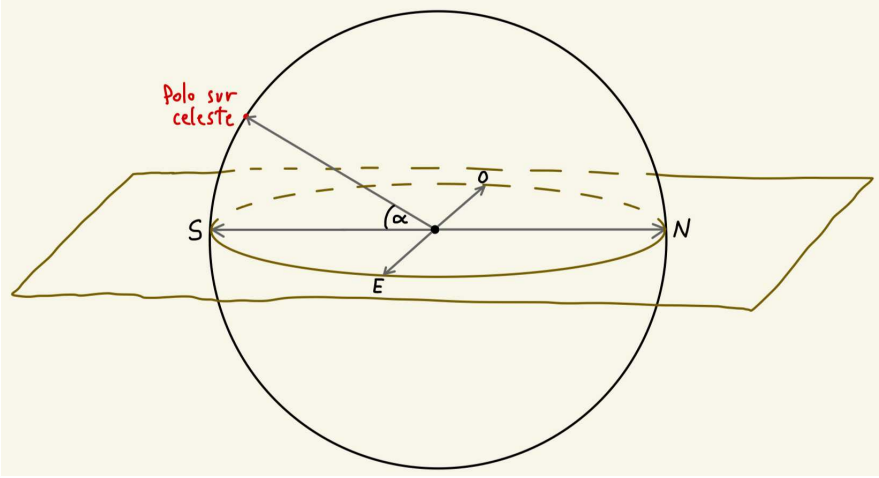
(1) Si un plano atraviesa una esfera, entonces la intersección será una circunferencia sobre la esfera.

(2) Si yo dibujo una circunferencia sobre una esfera, sea cual sea, entonces existirá un plano que corte a la esfera precisamente en dicha circunferencia.

Es decir, es exactamente lo mismo hablar de planos que de circunferencias sobre una esfera, porque cada cual proviene del otro.



Por ello es que cuando anteriormente estiramos la alfombra-plano, esta intersectó a la esfera celeste en una circunferencia, la cual es precisamente la base de la cúpula de observación, y sobre la cual podemos poner los puntos cardinales. Así podemos hablar indistintamente del *círculo del horizonte* o del *plano del horizonte*.

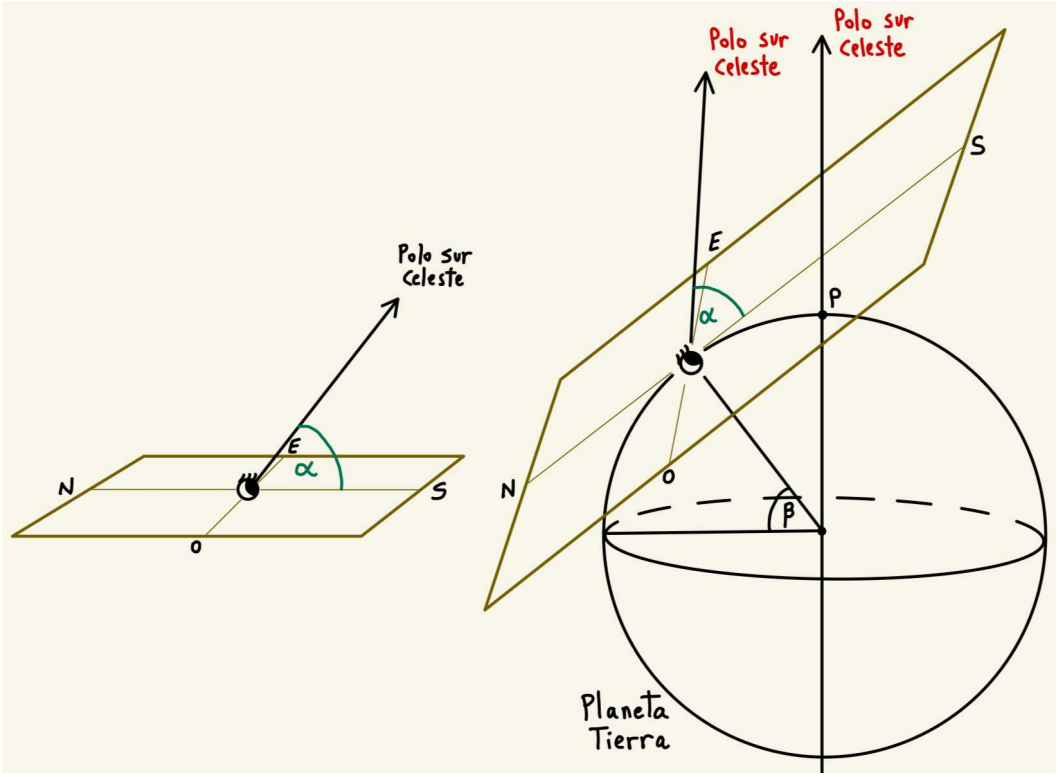


Con todo lo anterior ya nos hemos convencido de varias cosas: que tiene sentido que consideremos que el universo es una esfera que posee en su superficie a las estrellas; que el Sol traza un recorrido inclinado y circular en dicha esfera, cruzando las constelaciones zodiacales; y que existe otro círculo sobre esta esfera, el círculo del horizonte del observador, cuya inclinación con respecto al eje de giro de la propia esfera celeste es igual al ángulo de elevación del polo con respecto al horizonte (α), medido por el observador en su localidad.

Hemos concluido entonces que el ángulo de elevación del polo es clave para ubicar nuestro círculo del horizonte sobre la esfera celeste. Por ello en este punto es importante notar que para distintos sitios del planeta, este ángulo de elevación del polo es distinto. ¿Qué relación existe entre la posición de un observador en la Tierra y este ángulo de elevación del polo?

Supongamos que hay un observador en el hemisferio sur del planeta, el cual mira directamente al polo sur celeste, y en consecuencia, la dirección Sur (y al polo sur terrestre que denotamos abajo por P). Como el ángulo de elevación del polo sur celeste vale α, entonces tenemos la ya bastante repetida configuración de la imagen de abajo a la izquierda.

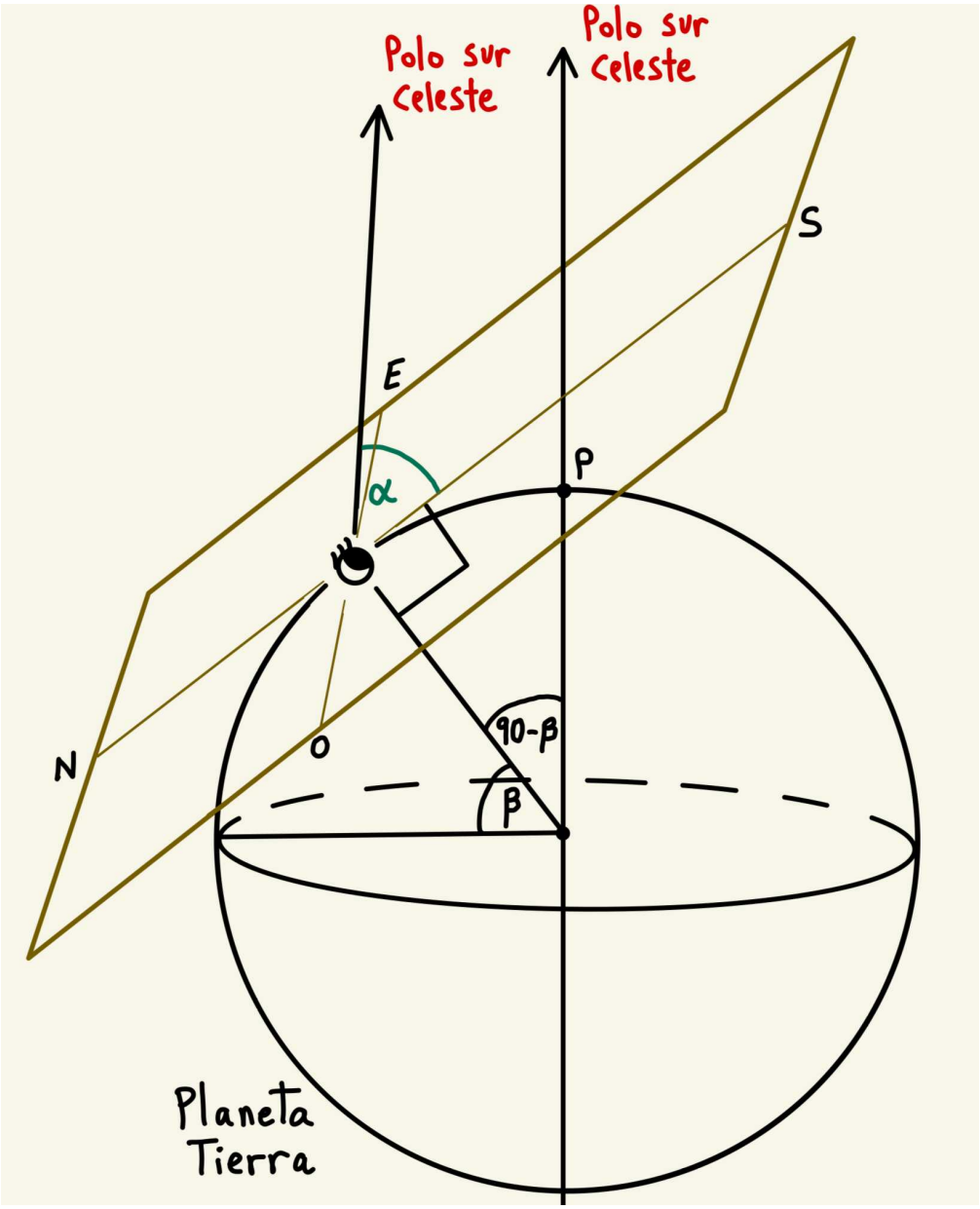
Como la alfombra-horizonte es tangente a la Tierra en el punto desde donde este observador mira el cielo, entonces si llamamos β a la latitud del observador, tendremos la configuración geométrica de la imagen de abajo a la derecha.



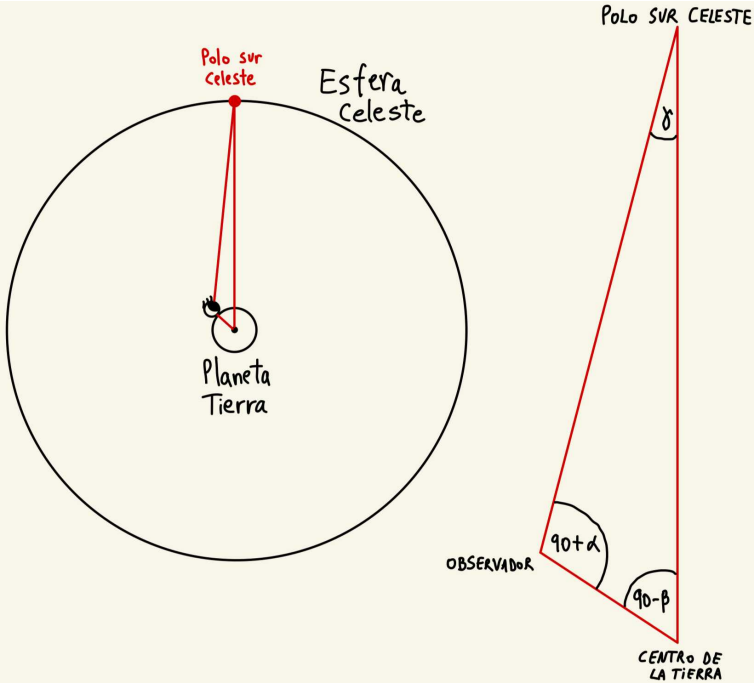
Nuestra misión será verificar que α y β valen lo mismo.

Para ello sigamos trabajando sobre la configuración geométrica anterior. Teniendo en cuenta la imagen a continuación, notemos que el eje de rotación de la esfera celeste cruza los polos celestes y simultáneamente cruza los polos terrestres. Por otro lado, dicho eje atraviesa tanto el ecuador celeste como el ecuador celeste en ángulo recto. De esta manera tenemos que el ángulo que forma el polo sur celeste, el centro de la tierra y el observador es de $90 - \beta$.

Por otro lado, notemos que el ángulo que forma el plano del horizonte con el radio que une el centro de la tierra con el observador es de $90°$ (porque es un plano tangente). De esta manera el ángulo que forma el polo sur celeste, el observador y el centro de la tierra es de $\alpha + 90$.



Si nos focalizamos en el triángulo que forman el observador, el centro de la Tierra y el polo sur celeste, entonces tenemos 2 de sus 3 ángulos. Si llamamos γ al ángulo que forma el observador, el polo sur celeste y el centro de la Tierra, entonces tenemos la configuración triangular siguiente.



Sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, por lo que

$$(90 + \alpha) + (90 - \beta) + \gamma = 180$$

Si sumamos los números involucrados en el lado izquierdo de la ecuación tenemos que

$$180 + \alpha - \beta + \gamma = 180$$

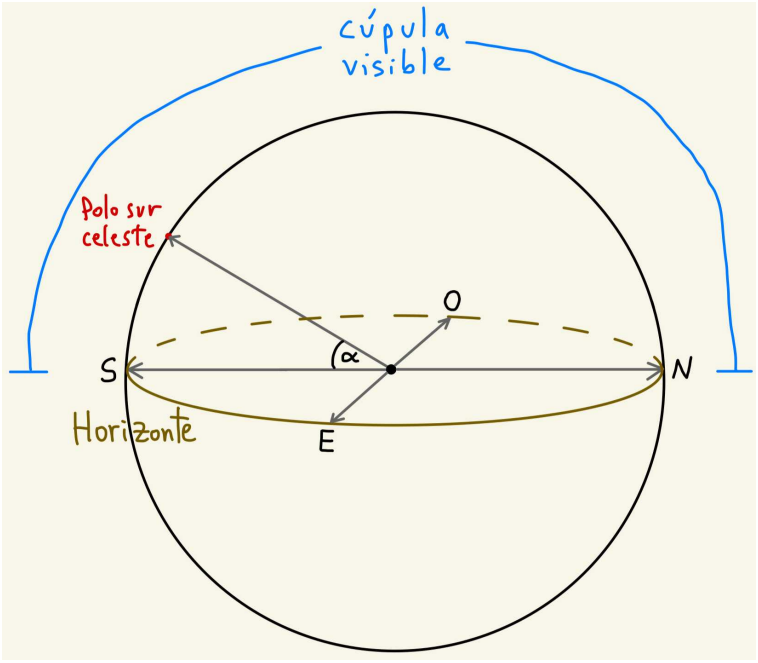
Si restamos 180 a ambos lados de la ecuación nos queda

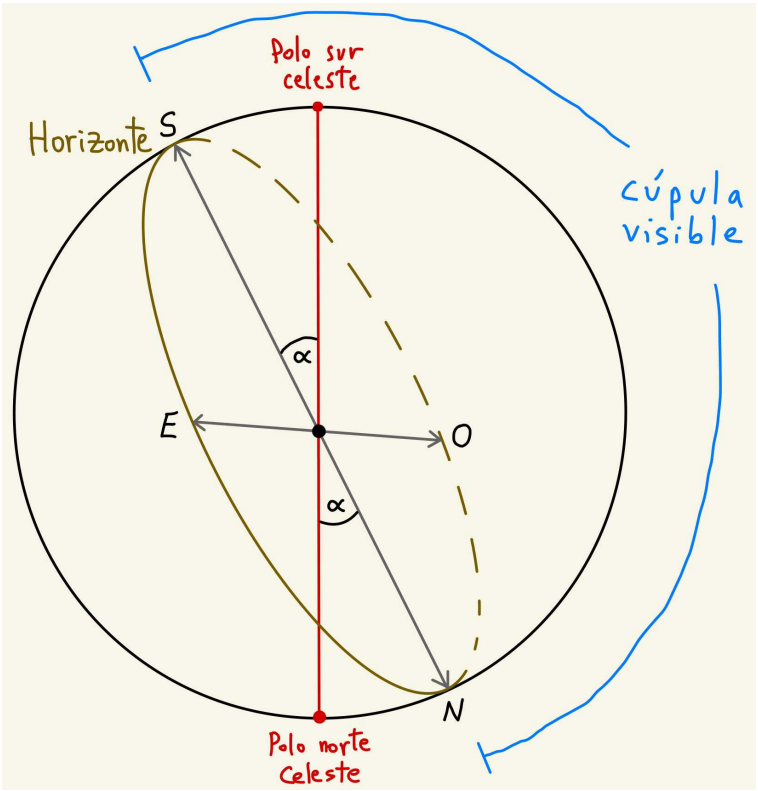
$$\alpha - \beta + \gamma = 0$$

Hemos conseguido una ecuación que relaciona los ángulos α, β y γ. Ahora pensemos un poco. La esfera celeste es una esfera gigantesca, por lo que su radio es muchísimo mayor que el radio de la Tierra. Teniendo eso en cuenta, y mirando la imagen anterior de nuestro planeta dentro de la esfera celeste, nos podemos convencer de que en realidad dicho triángulo debería haber sido extremadamente delgadito, como una especie de "punta de aguja" con vértice en el ángulo γ. Como γ es tan exageradamente pequeño, podemos considerar entonces que $\gamma = 0$.

Como teníamos que $\alpha - \beta + \gamma = 0$ entonces concluimos que $\alpha - \beta = 0$, o sea, $\alpha = \beta$. Hemos cumplido la misión.

Acabamos de verificar que el famoso ángulo de elevación del polo celeste es idéntico a la latitud terrestre a la que está dicho observador. Las dos imágenes abajo muestran, desde dos ángulos distintos, la inclinación del círculo del horizonte con respecto al eje Norte-Sur de la esfera celeste, donde α es ahora la latitud del observador.



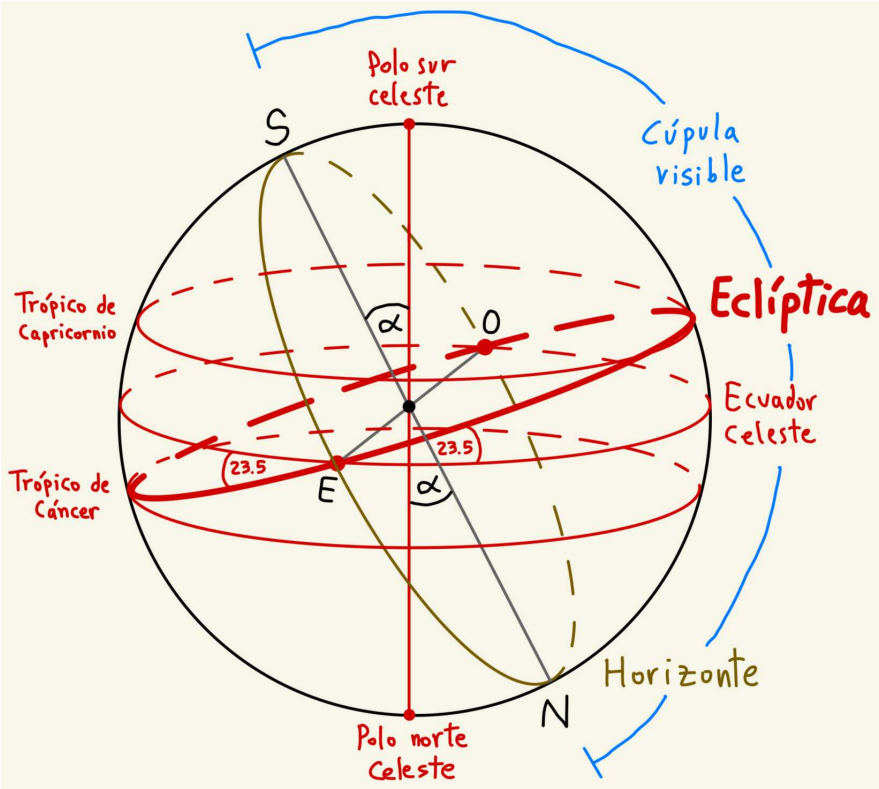


Todo el trabajo que hemos hecho con los 3 experimentos mentales anteriores nos permite concluir que es posible representar el movimiento de las estrellas y el Sol mediante una esfera matemática que contiene en su superficie lo siguiente:

(1) Las estrellas, los polos celestes, el eje Norte-Sur y el ecuador celeste.

(2) La eclíptica, con un ángulo de inclinación de 23.5° con respecto al ecuador celeste, junto con sus trópicos.

(3) El círculo del horizonte con los puntos cardinales, cuyo ángulo de inclinación α con respecto al eje Norte-Sur es igual a la latitud del observador.

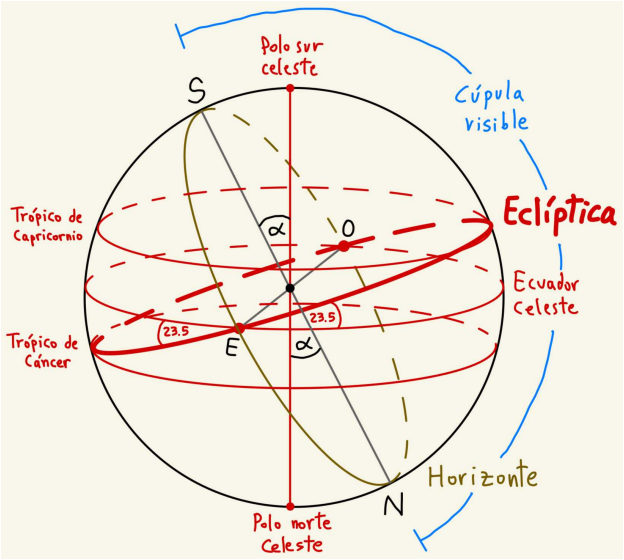


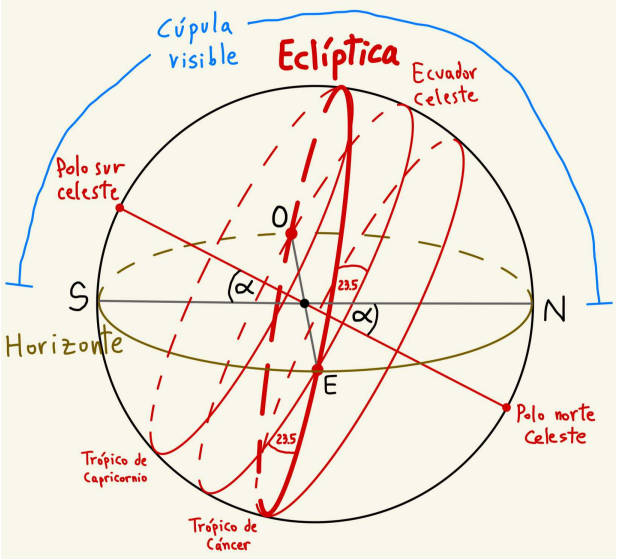
Es importantísimo destacar que, a pesar de que todo en esta esfera gira en conjunto, el horizonte ***siempre*** se queda estático, ya que al principio nos propusimos dejar de lado todos nuestros saberes de astronomía moderna, ante lo cual ***es el cielo el que se mueve y no la Tierra ni nuestro horizonte***. De todas las posibles configuraciones de giro de la esfera celeste en relación al horizonte elegimos para la imagen de arriba, por mero motivo estético, aquella que hace coincidir los equinoccios con el Este y el Oeste del horizonte.

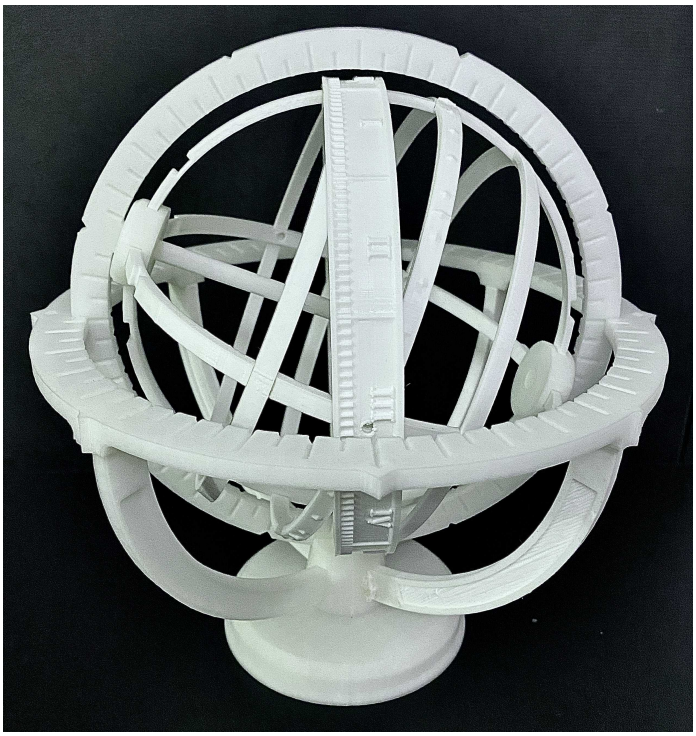
Debe quedar muy claro que, aunque el Este y el Oeste son puntos estáticos en este modelo matemático, los equinoccios y los solsticios (como cualquier punto de la esfera celeste exceptuando sus polos) giran con toda la esfera, tal como si fueran estrellas.

V. Esfera armilar desde la esfera celeste

Si giramos la esfera de tal manera que el horizonte quede horizontal (valga la redundancia), vemos que se nos revelan todas las partes de la esfera armilar que hemos estudiado en la actividad 2.







De esta manera descubrimos que la esfera armilar no es nada más que una versión materializada de la esfera celeste, siendo que esta última, hasta este momento, no era más que un objeto matemático abstracto.

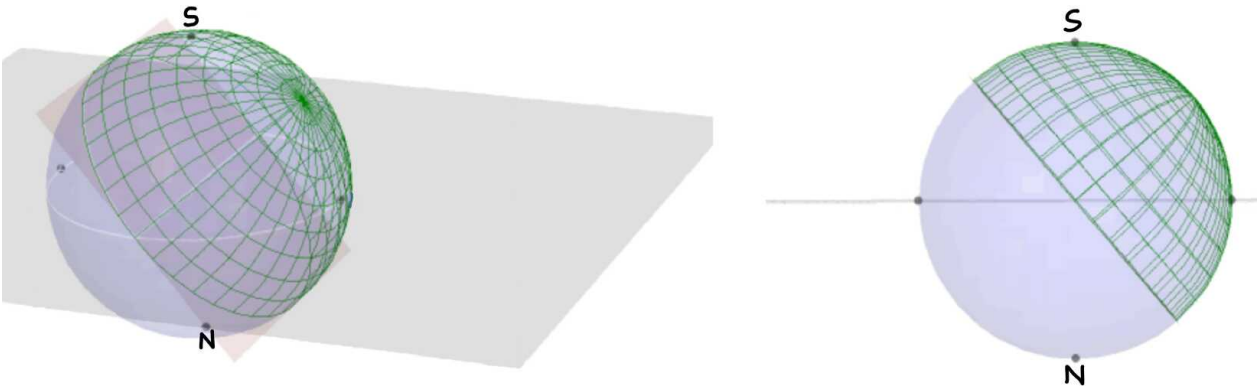
Si bien la esfera armilar que hemos estudiado en la actividad 2 no contenía ninguna estrella, existen ejemplares de esferas armilares antiguas que sí tenían algunas, ya sea en forma de punteros o dentro de una constelación trazada en los anillos de la esfera rotatoria. Estas últimas esferas serían coherentes con la idea original de materializar la esfera armilar en su totalidad.

Las imágenes a continuación muestran una esfera armilar gigante en el Palacio de las Naciones de Ginebra (Suiza), realizada por el escultor Paul Manship (1939).

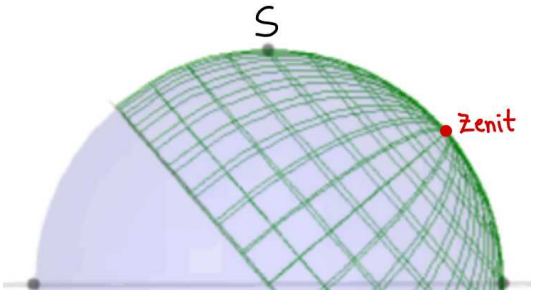
Ya hemos resaltado cómo la esfera armilar es una materialización *tridimensional* de la esfera celeste, y por ello ahora procederemos a ver cómo es posible materializar la esfera celeste en un astrolabio *bidimensional*.

VI. Astrolabio desde la esfera celeste

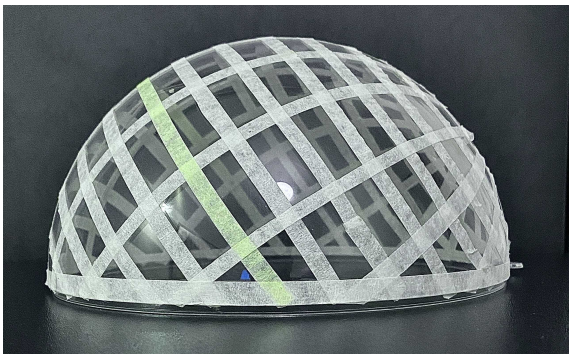
Lo primero que debemos notar es que si dejamos vertical el eje Norte-Sur de la esfera celeste, pero con el polo sur celeste hacia arriba, entonces el plano del horizonte de un observador en el hemisferio sur del planeta estará inclinado un ángulo α con respecto a este eje. Si dibujáramos los pelitos de azimut y los círculos de altura de la cúpula sobre el horizonte, tendríamos una semiesfera "cuadriculada" como en las imágenes siguientes.



Ahora eliminemos el hemisferio de abajo de la esfera celeste anterior, con lo cual nos quedaría solamente el hemisferio sur celeste (cuya punta es el polo sur celeste) junto con un corte de la cúpula del horizonte (cuya punta es el zenit), tal cual en la imagen siguiente.

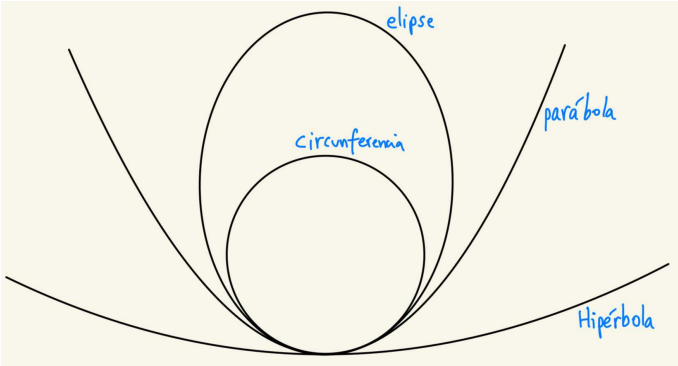


Si ahora materializamos en plástico transparente y cintas adhesivas esta extraña unión entre la semiesfera celeste y un trozo de la semiesfera del horizonte, pintando con destacador amarillo el círculo del horizonte (la altura de 0°), obtendremos entonces lo que vemos a continuación.



Ya con nuestra semiesfera plástica procedemos a buscar un pequeño foquito luminoso (como la linterna del teléfono, por ejemplo) con el cual iluminarla. Posamos la semiesfera plástica sobre su punta (que es el polo sur celeste) y la iluminamos desde arriba, obteniendo las sombras de los círculos de altura y azimut sobre el horizonte. Dependiendo de dónde uno ponga la luz saldrán figuras geométricas bastante curiosas.

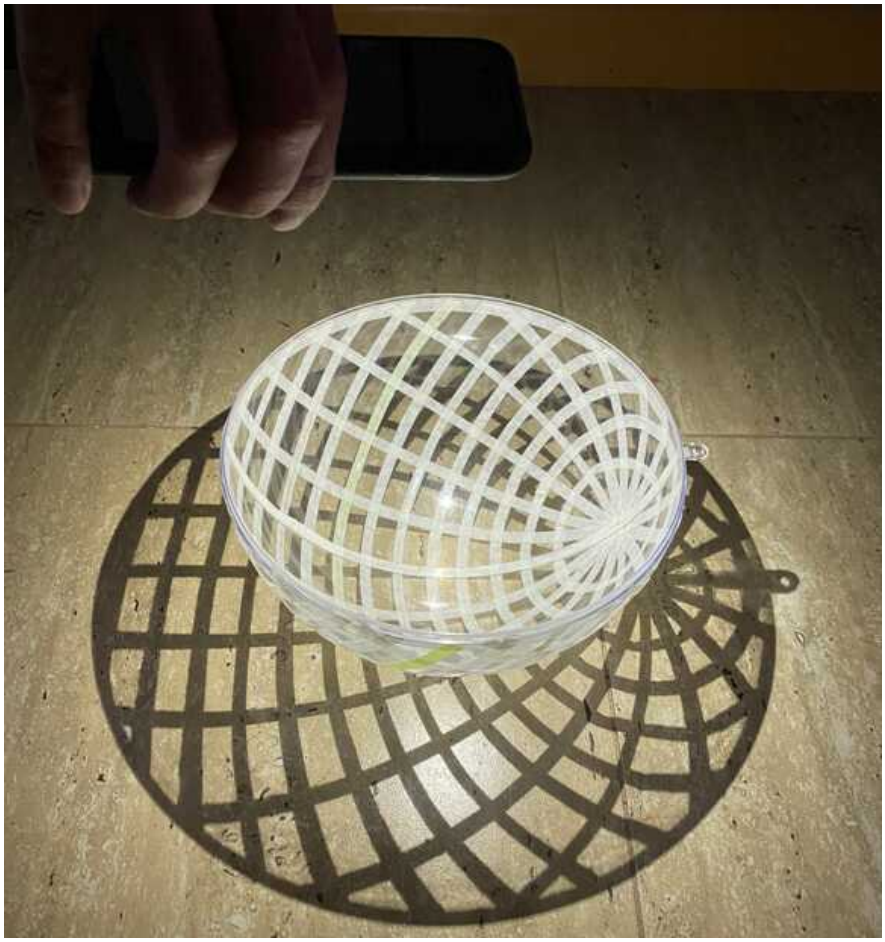
Es interesante notar aquí que estas curvas que vemos proyectadas en el suelo son precisamente las llamadas *cónicas*, esas figuras que uno estudia tanto en el colegio como en la universidad en los cursos de matemáticas. La parábola, la elipse, la hipérbola y la circunferencia son los 4 tipos de cónicas que existen, y aquí han aparecido de manera natural en nuestro intento de proyectar la esfera celeste sobre un plano, mediante este artilugio luminoso.



Si jugamos a proyectar estas sombras de los círculos de altura y azimut podemos descubrir cómo se van deformando estas cónicas, viendo cómo es que gradualmente los círculos se transforman en elipses, luego las elipses en parábolas y luego las parábolas en hipérbolas (ver la imagen arriba a la derecha). Estas hipérbolas, a medida que vamos bajando en esa imagen, cambian de abrirse hacia arriba a abrirse hacia abajo.

Lamentablemente, dentro de todas estas figuras que resultan, surge un gran problema. El asunto central es que uno debiera poder *construir instrumentos físicos* en base a dichas curvas, ya que no solamente deseamos comprender teóricamente el astrolabio, sino también verlo materializado. ¿Y qué problema hay con las cónicas que van apareciendo? Que la única cónica fácil de grabar sobre un material es la circunferencia (que solamente requiere de un compás), mientras que para las otras 3 cónicas no existe un instrumento sencillo para poder dibujarlas materialmente de manera directa.

Tenemos entonces la dificultad que para la gran mayoría de lugares en donde pongamos el foquito, nos salen cónicas complicadas de dibujar. Pero si uno sigue intentando posiciones para la luz y las sombras que esta genera, resulta increíble descubrir que existen maneras de conseguir solamente sombras circulares o líneas rectas. Esto lo podemos lograr, por ejemplo, cuando ponemos la luminaria exactamente en donde estaría el polo norte celeste, opuesto al polo sur que está tocando el suelo (completando imaginariamente la esfera). Con ello las sombras serán solamente círculos o rectas, y el problema de materializarlas queda resuelto, porque dichas figuras se pueden realizar usando regla y compás.

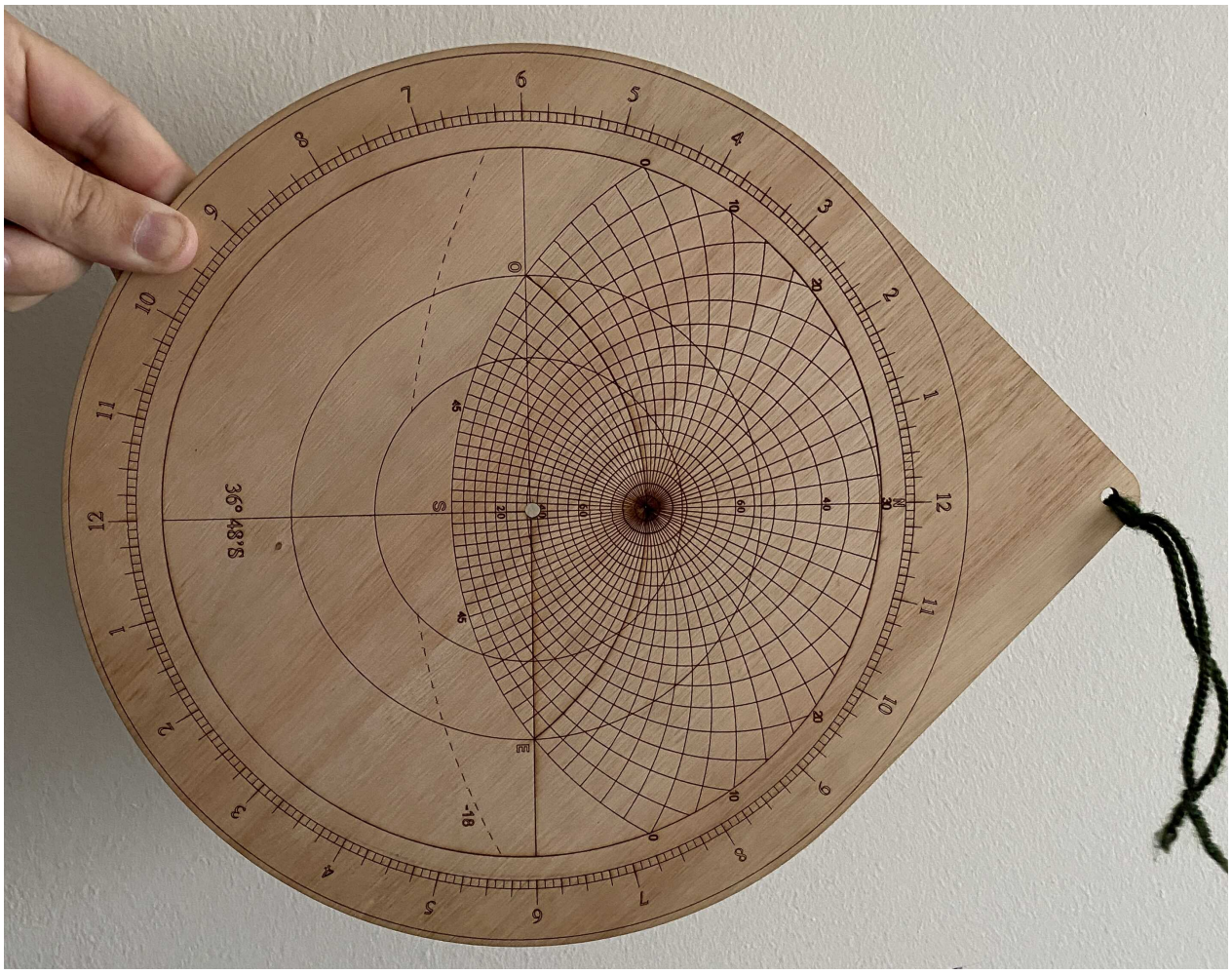


Esta proyección que va desde un punto de la esfera celeste y proyecta sobre un plano las sombras provenientes de las curvas sobre su superficie la llamaremos *proyección estereográfica*, y tiene la fascinante propiedad que ya hemos mencionado: transforma los círculos "inclinados" de la esfera en solamente círculos o líneas en el plano del suelo, esquivando las otras cónicas.

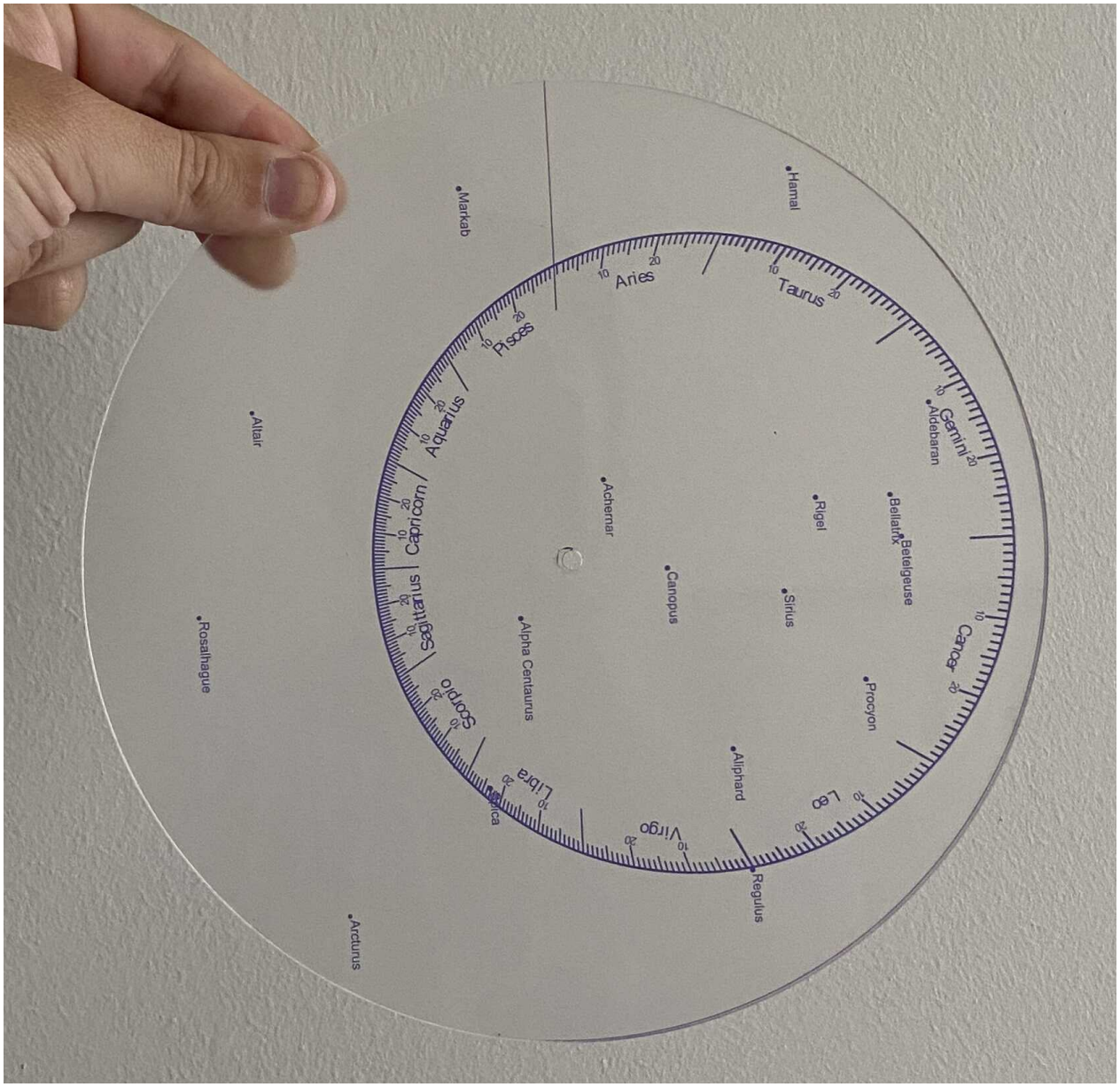
Y no solamente eso, porque si bien la propiedad de conservar círculos y rectas nos facilita enormemente la construcción de estos instrumentos, este tipo de proyección también conserva los ángulos en los que se cortan los círculos de altura y azimut, que son siempre de 90°.

Así tenemos que la conservación de círculos y rectas junto a la conservación de los ángulos que tiene la proyección estereográfica nos permiten resolver tanto el problema de la construcción como el de la utilidad real del instrumento, respectivamente.

La proyección que vimos en la imagen anterior es precisamente lo que tenemos en el frente del astrolabio.



Por otro lado, si hiciéramos el mismo procedimiento a las estrellas y la eclíptica de la propia esfera celeste (dejando de lado las líneas de azimut y altura sobre el horizonte) ***obtendríamos exactamente la araña del astrolabio***.



Por todo lo anterior podemos concluir que el astrolabio es una materialización bidimensional de la esfera celeste[29], cuyo proceso de "aplastamiento" fue la proyección estereográfica.

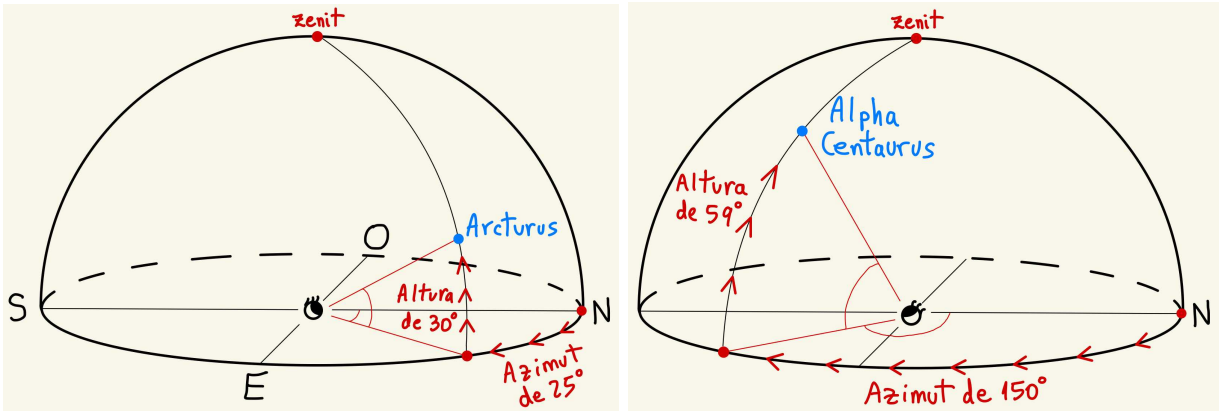
[29] Decimos una y no la materialización porque existen otros tipos de astrolabios que usan proyecciones estereográficas desde otros puntos de la esfera celeste, como por ejemplo los distintos *astrolabios universales* que mencionaremos en la actividad 4.

VII. Coordenadas ecuatoriales

En esta última sección lo que haremos será ponerle ejes coordenados a la esfera celeste. Para ello es importante que recordemos cómo le pusimos ejes coordenados a la cúpula que observamos sobre nuestro horizonte.

Comencemos recordando que en la actividad 1 con el astrolabio aprendimos que *cualquier punto en el cielo, tanto encima como por debajo del horizonte*, estaba definido por exactamente 2 valores: el azimut y la altura. Para medir el azimut lo que hacíamos era comenzar en el punto Norte sobre el horizonte y luego girábamos hacia el Este, pero podríamos preguntarnos ¿podríamos elegir otro punto para comenzar a medir el azimut? La verdad es que cualquier punto sobre el horizonte nos podría haber servido como un inicio legítimo de nuestras mediciones, pero elegimos *por convención* la dirección Norte. Así tenemos que cada posible azimut toma un único valor numérico entre 0° y 360° grados, medido desde el ya mencionado Norte sobre el horizonte[30]. Por otro lado, la altura se mide verticalmente desde el horizonte, siendo positiva hacia arriba y negativa hacia abajo, tomando un único valor entre -90° y 90°.

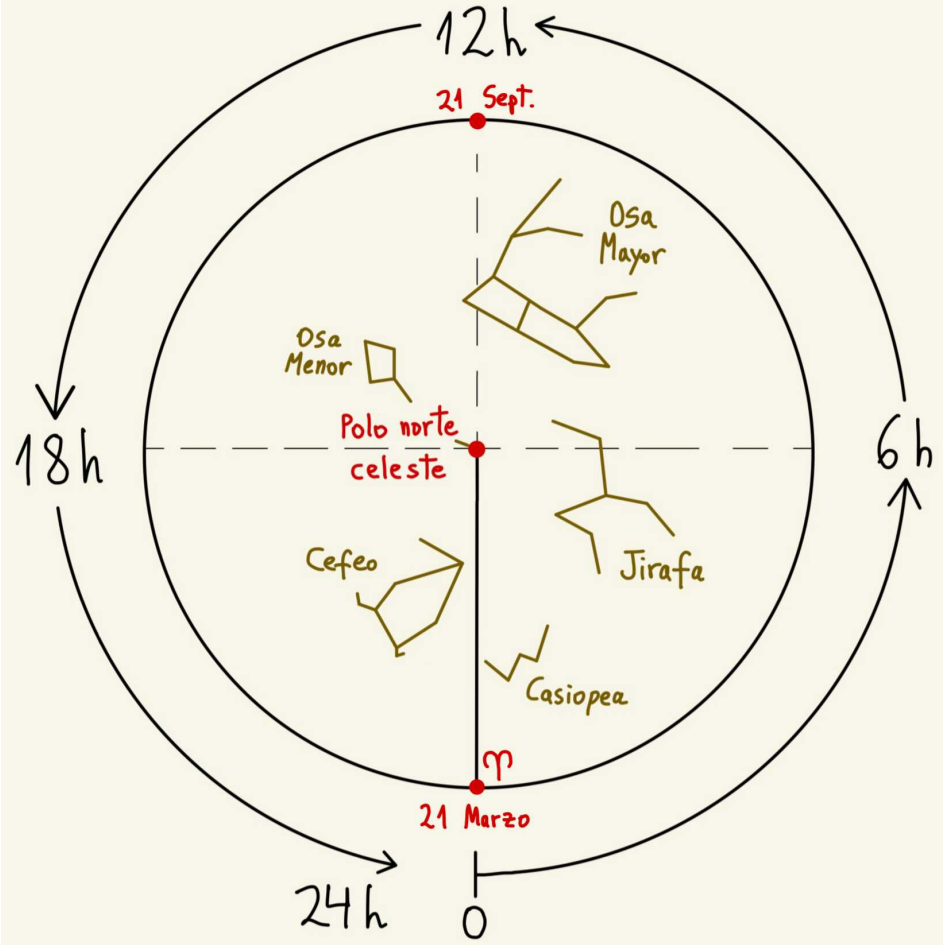
En la imagen siguiente tenemos dos de los ejemplos de estrellas que vimos al inicio de la actividad 1, para el día 10 de mayo a las 22:20 hrs.



Lo que haremos en esta sección será ponerle coordenadas a la esfera celeste de la misma manera en que hemos construido las coordenadas horizontales, y las llamaremos **coordenadas ecuatoriales**. La intención principal que tenemos con esto es poder ubicar de manera precisa las estrellas y la posición del Sol sobre esta esfera rotatoria, y ver cómo interactúan estas coordenadas con las coordenadas horizontales definidas sobre la cúpula estática encima del horizonte.

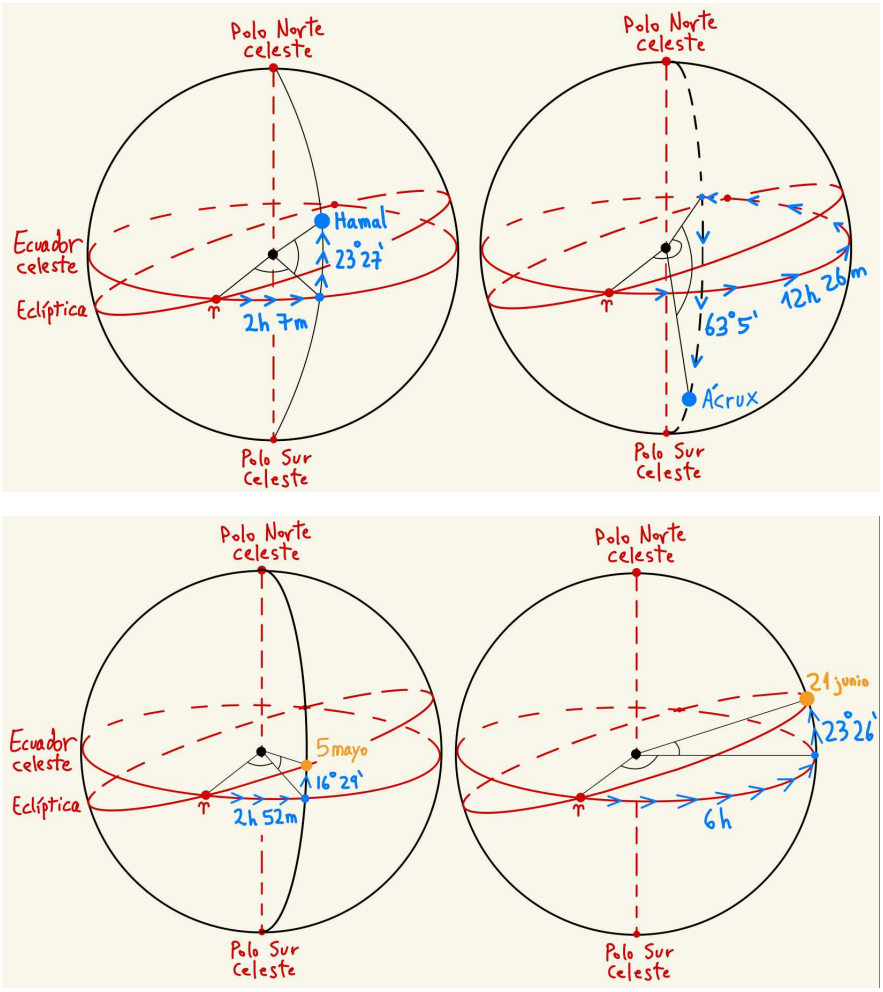
[30] No olvidemos que igual podemos considerar azimut negativos, girando desde el Norte sobre el horizonte hacia el Este.

Comencemos con el ángulo horizontal, que en las coordenadas horizontales llamamos azimut, y que en las coordenadas ecuatoriales llamaremos **ascensión recta**. Recordemos que en las coordenadas horizontales tenemos un círculo de referencia, el horizonte, sobre el cual no era tan obvio saber cuál punto elegir como inicio del azimut. En el caso de las coordenadas ecuatoriales nuestro círculo de referencia será el ecuador celeste, y la convención adoptada para la elección del punto sobre el que comenzar las mediciones será el punto del ecuador celeste dado por el equinoccio de otoño del hemisferio sur (que es el equinoccio de primavera para el hemisferio norte), que ocurre el 21 de marzo, el cual llamaremos *Primer punto de Aries*, y cuyo símbolo es ♈. Por eso tenemos que la ascensión recta será ahora el "azimut" de la esfera celeste, el cual en vez de medirse en grados de 0 a 360 (como en las coordenadas horizontales), lo mediremos en horas de 0 a 24, y giraremos en sentido antihorario (igual que el movimiento anual del Sol en la eclíptica, y contrario a como medíamos el azimut).



Continuemos con el ángulo vertical, que en las coordenadas horizontales llamamos altura, y que en las coordenadas ecuatoriales llamaremos **declinación**. Ya hemos mencionado que el círculo de referencia para las coordenadas ecuatoriales es el ecuador celeste, por lo que la declinación será ahora la "altura" de la esfera celeste, que también irá de -90° a 90°.

A continuación ponemos imágenes que muestran las coordenadas ecuatoriales de algunas estrellas y del Sol[31], donde la estrella *Sirio* tiene ascensión recta 6h 45m ($\sim 100°$) y declinación $-16.7°$ (está en el hemisferio sur celeste); la estrella *Ácrux* tiene ascensión recta 12h 26m ($\sim 190°$) y declinación $-63°$; el Sol el día 5 de mayo tiene ascensión recta 2h 53m ($\sim 40°$) y declinación 16.5°; y el mismo Sol el día 21 de junio (solsticio de invierno del hemisferio sur) tiene ascensión recta 6h 1m ($\sim 90°$) y declinación 23.5°. No olvidemos que las estrellas se mueven todas en conjunto, por lo tanto sus coordenadas ecuatoriales nunca cambian[32]. El Sol, en cambio, como varía su posición en relación a las estrellas, sí cambia sus coordenadas ecuatoriales durante el año (aunque siempre está en la eclíptica), y por ello en su caso *debemos especificar el día en que estamos midiendo sus coordenadas.*



[31] Es importante destacar que en todos los experimentos mentales que hemos hecho siempre representamos la esfera celeste con el polo sur arriba y el polo norte abajo, por el simple hecho de que nosotros mismos estamos en el hemisferio sur terrestre, y así es como naturalmente la vemos nosotros. En este caso, para definir las coordenadas, usaremos la esfera celeste con el polo norte arriba, que es la manera en que estas coordenadas han sido trabajadas y transmitidas históricamente (el mundo griego, el musulmán y el europeo todos habitaron en el hemisferio norte).

[32] En realidad, si somos precisos, sí cambian, ya que el Primer punto de Aries va cambiando de lugar en la esfera celeste, realizando un ciclo completo en su ecuador que tarda aproximadamente 26.000 años. Como recorre 360° en 26.000 años, entonces se mueve 1° cada $\sim$ 72 años. Esta es la razón de por qué las arañas de los astrolabios antiguos son distintas de las nuestras actuales: es porque con el paso de los siglos el Primer punto de Aries ha ido cambiando de lugar, cambiando así las coordenadas celestes de las demás estrellas.

Comparando las coordenadas horizontales con las coordenadas ecuatoriales tenemos la siguiente tabla.

Coordenadas	
Horizontales	**Ecuatoriales**
Horizonte	Ecuador celeste
Azimut	Ascensión recta (en horas)
Norte sobre el horizonte	Primer punto de Aries ♈
Altura	Declinación (en grados)
Zenit	Polo norte celeste

VIII. Resumen

Podemos resumir entonces todo lo que hemos visto en esta actividad en los siguientes puntos:

1. Tiene sentido asumir que las estrellas, por su permanente y regular giro en el cielo, son como puntos brillantes incrustados en la superficie de una esfera gigantesca, que llamamos esfera celeste.

2. Dicha esfera giratoria con sus estrellas y constelaciones nos sirve de marco de referencia para comprender que el Sol tiene una trayectoria anual circular, inclinada 23.5° con respecto al ecuador de la esfera celeste.

3. El plano del horizonte de un observador en la Tierra es un círculo *fijo* sobre la esfera celeste, el cual define, junto a la dirección Norte, las coordenadas horizontales.

4. El ecuador de la esfera celeste define, junto al Primer punto de Aries ♈, las coordenadas ecuatoriales de esta esfera rotatoria.

5. Las coordenadas ecuatoriales y las horizontales son ambas trabajadas sobre la misma esfera: la esfera celeste. El astrolabio y la esfera armilar son instrumentos científicos que nos permiten ver de manera tangible cómo es que interactúan estos dos tipos de coordenadas, al girar la esfera celeste con la cúpula del horizonte fijada.

Con esto concluimos nuestra actividad 3.

Sugerencias para realizar la actividad

La tercera actividad de este proyecto tiene 3 partes, cuyas descripciones y tiempos ideales son los siguientes:

1. Primero recibiremos a los profesores y sus estudiantes en la sala donde realizaremos la actividad, donde firmarán la lista. Cuando ya hayan llegado todos, les pediremos que se ordenen en los grupos creados de manera aleatoria para esta actividad (que no coincidarán con los de las actividades pasadas), los cuales estarán proyectados en el telón. Considerando que no hay test de entrada en esta ocasión, todo esto debiera estar listo como mucho 10 minutos después de la hora de inicio agendada.

2. Ya con todos los grupos correctos sentados, empezaremos la actividad de los fundamentos teóricos con el apoyo del PPT oficial, cuya duración ideal será de 1 hora y 45 minutos. En esta parte habrá un par de pausas intermedias para que los estudiantes y profesores puedan reposar su mente e ir al baño.

3. Terminado el punto anterior entregaremos el test de salida a cada profesor y a cada estudiante, que por tener 3 breves preguntas debieran resolver en como mucho 10 minutos. Finalmente, les pediremos a todos los participantes que nos esperen a la salida para tomarnos una foto en conjunto.

En resumen, considerando los posibles retrasos y la pausa intermedia, la actividad completa está pensada para ser realizada en como mucho 2 horas y 15 minutos. El horario ideal para realizar esta actividad es entre las 10:00 y las 12:15 hrs, durante cualquier día entre lunes y jueves.

Ahora pasaremos a detallar cuáles son los puntos que debemos tocar sí o sí en la actividad de los fundamentos teóricos, enmarcados en la parte 2 mencionada anteriormente.

En primer lugar, es importante destacar que la actividad es eminentemente expositiva, dado que es el profesor encargado quien dirigirá la imaginación de los estudiantes y profesores a través de los experimentos mentales. Por ello es que en esta actividad la participación de los asistentes pasará más por contestar preguntas muy específicas relativas a estos experimentos que por realizar cálculos como en las dos actividades anteriores.

Sección I. Introducción

La introducción tiene como objetivo poner a los estudiantes en conocimiento del plan detrás de lo que hemos estado haciendo: hemos comenzado el proyecto interactuando sensorialmente con unos instrumentos científicos, pero eso es solamente una parte de un plan más amplio. Detallaremos las 3 fases del proyecto especificando que nuestra labor pasará de las manos hacia la mente, para luego continuar con profundas reflexiones sobre la historia de las matemáticas, moviéndonos de lo científico a lo humanista.

Luego de eso lo que haremos será introducir a los asistentes a la idea de que es completamente natural asumir un universo esférico que gira sobre nosotros, el cual observamos desde nuestro planeta que está completamente quieto. Aclarar que en esta actividad intentaremos ser lo más geocéntricos posible. Aclarar que este intento de pensar geocéntricamente será difícil, precisamente porque hemos sido educados contrario a ello, como parte de una larga tradicción cultural de occidente. Los siguientes tres experimentos mentales nos irán convenciendo de que tiene sentido la mirada de los antiguos.

Sección II. Primer experimento mental: la esfera celeste

Este experimento tiene como objetivo que los participantes vean por qué es tan natural asumir que el universo es una esfera giratoria con las estrellas pegadas en su superficie, mediante la observación atenta de estrellas y constelaciones específicas del cielo nocturno.

Justo después de definir el polo sur celeste (como centro de las trayectorias circulares de las estrellas) mostraremos un video el cual muestra el giro de las estrellas mediante un "time-lapse".

Cuando expliquemos las constelaciones básicas (*Osa Mayor*, *Orión* y *Cruz del Sur*) es conveniente que cada monitor muestre a sus 2 grupos asociados la esfera celeste magnética, indicando dónde están cada una de esas 3 constelaciones.

Inmediatamente después de dar por terminado el primer experimento mental haremos una pausa de 5 minutos.

Sección III. Segundo experimento mental: la eclíptica

Este experimento tiene como objetivo que los participantes vean cómo el Sol se mueve en relación a la esfera celeste que vimos en el primer experimento mental, descubriendo la eclíptica y todos los conceptos que de ella se desprenden: solsticios, equinoccios y trópicos.

En este punto cada monitor debe mostrar a sus 2 grupos asignados cuál es el círculo de la eclíptica sobre la esfera celeste, indicando el sentido de giro de esta (contrario a las "horas" indicadas en el ecuador celeste).

Cuando hayamos comparado el dibujo de la eclíptica y sus trópicos con el dibujo de la esfera rotatoria, ahí debemos insistir en que vean la eclíptica como el movimiento anual del Sol, cuyo paso de los meses en la esfera rotatoria es precisamente el indicado por la flecha del dibujo de la eclíptica.

Explicaremos brevemente cómo el movimiento de retrogradación de los planetas es mucho más complejo que el del Sol, y solamente mencionaremos que la Luna tiene una trayectoria muy complicada.

Terminado el segundo experimento mental haremos una pausa de 5 minutos.

Sección IV. Tercer experimento mental: el horizonte

Aquí es fundamental que los participantes vean de dónde sale el círculo del hozironte en la esfera celeste, y que su inclinación con respecto a esta última es precisamente la altura del polo.

Luego de eso, ver la configuración geométrica que permite determinar que dicha altura α del polo es igual a la latitud β del observador, haciendo hincapié en el triángulo formado por el observador, el polo sur celeste y el centro de la Tierra. Realizar lentamente los cálculos algebraicos que permiten ver que $\alpha = \beta$.

No olvidar hacer el resumen completo al final de esta sección para luego pasar a los instrumentos.

Sección V. Esfera armilar desde la esfera celeste

Darles un pequeño tiempo para que los participantes vean cómo todo el aparato teórico visto previamente se materializa en la esfera armilar que estudiamos en la actividad 2.

Aclarar que, a pesar del ejemplo de la esfera armilar del Ginebra, la gran mayoría de esferas armilares no tiene estrellas, porque es un asunto extremadamente complicado ubicarlas materialmente sobre la esfera rotatoria.

Al terminar esta sección haremos una pausa de 5 minutos, dejando proyectada en el telón la imagen de la esfera armilar en paralelo a la esfera celeste girada (apreciación).

Sección VI. Astrolabio desde la esfera celeste

Para hacer la experiencia de la proyección, un monitor sostendrá la semiesfera y el profesor pondrá la linterna de su teléfono para proyectar sobre la pared, el suelo o el techo, dependiendo de cuál superficie esté al alcance de la vista de todos los participantes. Lo hará desde distintos ángulos, viendo cómo se deforman las figuras y cómo obtenemos los círculos si ponemos la luz en el otro polo.

Sección VII. Coordenadas ecuatoriales

En este caso los ejemplos al final de la sección serán vistos en la propia esfera celeste magnética, donde cada monitor le mostrará a sus grupos las estrellas y el Sol ahí indicados. La manera apropiada de llegar a la estrella es comenzar en el Primer Punto de Aries, luego moverse por el ecuador celeste acorde a la ascensión recta, para finalmente subir o bajar acorde a la declinación.

Sección VIII. Resumen

A modo de cierre de la actividad es importantísimo recalcar que tanto el astrolabio como la esfera armilar son materializaciones de la esfera celeste tanto en 2D como en 3D, respectivamente, y que ambos instrumentos permiten ver cómo interactúan las coordenadas ecuatoriales giratorias con relación a unas coordenadas horizontales fijadas.

Capítulo 4: Matemática, astronomía e historia

Palabras clave. *Historia de la matemática, cultura occidental, referentes, relato usual, hitos, internalismo, linealidad, androcentrismo, eurocentrismo, Prometeo, historiografía, civilización islámica, ciencia y sociedad, David King, 3 problemas, astrolabio planisférico, astrolabio universal, Azucena Hernández Pérez, muwaqqit, muecín, miqati.*

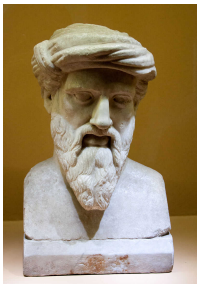
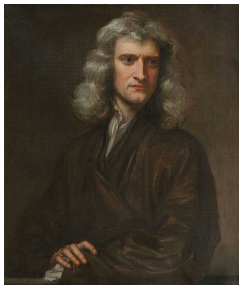
Contenido de la actividad

I. Introducción

La intención principal de esta actividad es que construyamos una visión amplia sobre cómo entendemos la historia de la matemática, ayudándonos con los instrumentos científicos que ya hemos estudiado en las actividades anteriores.

Lo primero que deberíamos preguntarnos es: ¿Por qué estudiar la historia de las ciencias o de las matemáticas? Para contestar esto hay que considerar es que la cultura occidental -dentro de la cual estamos insertos como país- cuando mira su historia, reconoce que uno de sus mayores distintivos es un desarrollo sostenido de la ciencia y la tecnología durante ya cuatro siglos, siendo las matemáticas un pilar fundamental de ambas. La ciencia, la tecnología y las matemáticas le han permitido a la cultura occidental ahondar en la estructura del universo y en las maneras de manipularlo, lo cual eventualmente ha permitido materializar tecnologías en beneficio de las personas. Podemos convenir, al menos desde las afirmaciones anteriores, que tiene sentido estudiar la historia de la matemática, porque puede darnos luz sobre la cultura occidental y parte de su historia.

¿Qué sabemos de la historia de la matemática? ¿A quiénes reconocemos como personas valiosas de esta disciplina? ¿Cuáles son sus eventos más importantes? Probablemente nos suene el nombre del griego Pitágoras de Samos (por el teorema de Pitágoras que vemos en la escuela) por el año 500 a.C., o el del inglés Isaac Newton (como aquel que inventó el cálculo, y que le cayó una manzana en la cabeza) allá por el año 1700. Si la matemática tiene más de 2000 años de vida, es lógico que hayan participado más de dos personas en su historia. Entonces ¿Por qué no sabemos más de ella? ¿Cómo podemos pasar 12 años de nuestra vida escolar estudiando matemática sin nunca haber sabido nada de su despliegue histórico?

Lo cierto es que la historia de la matemática está llena de personas de tiempos y lugares muy diversos, pero sus nombres y sus descubrimientos son desconocidos para la gran mayoría de la población mundial. Prácticamente no tenemos referentes en este sentido, y todo lo que podríamos saber de ellos sería por nuestra propia cuenta, escudriñando por aquí y por allá, y no precisamente porque sean promovidos como grandes personajes en la cultura general. Aquí en Chile, por ejemplo, tenemos estatuas de políticos, de poetas y de futbolistas, pero ninguna de un matemático.

Los referentes son muy importantes para cualquier disciplina, ya que son los que permiten construirle una identidad, definiendo a través de ellos sus valores centrales. Si miramos a nivel mundial, referentes sobran en las ciencias naturales y en las artes, y todos reconocemos el valor de destacar a personas como por ejemplo Albert Einstein, Gabriela Mistral o el Dalái Lama. Todas son figuras de talla mundial que encarnan los más altos valores de sus áreas, ya sea en la física, la poesía o la búsqueda de la paz mundial, y los conocemos en buena parte por la visibilidad internacional que les entrega el haber recibido un premio muy mediático: el Premio Nobel. Como no existe un Premio Nobel de las matemáticas, entonces carecemos de una "plataforma de visibilidad" tan notoria y de tanto alcance mediático para poder construir referentes públicos en nuestra disciplina. Lo más cercano a dicho premio sería la "Medalla Fields", que ejemplificamos aquí con el matemático estadounidense John Milnor y la matemática iraní Maryam Mirzajani.

Por ello, con nuestros referentes reducidos a Pitágoras y quizás Isaac Newton, es lógico que la gran mayoría de las personas desconozca la historia de las matemáticas, y darán por sentado que todo esto de los números y la geometría es un asunto del pasado, ya terminado. Es lógico pensarlo, ya que si Newton es la persona más reciente que tenemos en mente al pensar en la matemática, claramente ya todo habrá quedado resuelto allá por el año 1700. En esta misma línea es importante destacar el hecho de que el grueso de lo que vemos en el colegio hoy en Chile, en el siglo XXI, no supera por mucho dicha época.

Si nos dedicamos a investigar sobre la historia de la matemática, ya sea buscando en internet o leyendo de libros, veremos cómo es que poco a poco ciertos personajes históricos y ciertos eventos específicos comienzan a repetirse una y otra vez, y nos empezaremos a familiarizar con una narración más o menos coherente. El panorama general que resulta de una búsqueda así nos entrega, *muy* a grandes rasgos, lo que de aquí en adelante llamaremos ***el relato usual de la historia de la matemática.***

II. El relato usual de la historia de la matemática

Este relato nos dice (insisto, *muy* a grandes rasgos) que la matemática ha sido una disciplina que tiene más de 2000 años de existencia, y uno sus momentos clave fue el traspaso de saberes desde la antigua Grecia a Europa. Podemos destacar de este relato los siguientes hitos:

1. Los Elementos de Euclides en el 300 a.C. (en Alejandría). Este es un enorme compendio de la geometría de dicha época, que de hecho es la que vemos en el colegio: triángulos, círculos, ángulos y poliedros.

2. La geometría analítica en 1637 (en Francia-Holanda). Esta es la geometría estudiada mediante ecuaciones algebraicas: ecuación de la recta, ecuación de la circunferencia, y de muchas otras figuras geométricas. Es la geometría del plano cartesiano.

3. El cálculo diferencial e integral en 1675 (en Inglaterra-Alemania). Este es el asunto de las derivadas (cálculos de velocidades) y las integrales (cálculo de áreas) que usualmente uno estudia en la universidad si entra a una carrera con matemáticas.

4. La geometría hiperbólica en 1830 (en Rusia-Alemania-Hungría). Esta es una geometría distinta de la geometría de Euclides recién mencionada, lo que demuestra que existen más geometrías que la que vemos en el colegio.

5. Los cuaterniones en 1843 (en Irlanda). Estos son ciertos números especiales en los cuales multiplicar a por b puede ser distinto que multiplicar b por a. En consecuencia, existen más conjuntos numéricos que los que vemos en el colegio, y aunque son muy extraños, también son muy interesantes.

El relato usual no solamente nos habla de los grandes descubrimientos, sino también nos entrega ciertos nombres de personas que se han dedicado a engrandecer esta disciplina.

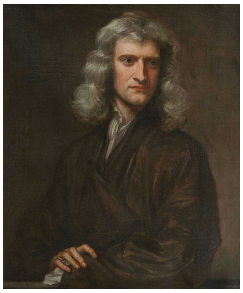
1. Euclides y la geometría griega, 300 a.C.

2. René Descartes y la geometría analítica, 1637.

3. Isaac Newton y el cálculo, 1675.

4. Nikolai Lobachevski y las geometría hiperbólica, 1830.

5. William Rowan Hamilton y los cuaterniones, 1843.



Lo interesante de este relato es que cuando uno reflexiona profundamente sobre cómo está construido, cuáles son los personajes escogidos y los eventos destacados, descubre que esta historia se sustenta implícita o explícitamente en los siguientes puntos:

1. La matemática debe tratar sobre ***verdades eternas***, ya que el teorema de Pitágoras, por ejemplo, será cierto para toda la eternidad, independiente de nuestras opiniones o de la corta existencia de cualquier ser humano.

2. Estas verdades eternas viven en el mundo de lo mental, de las ideas, y por ello ***lo más deseable es quitarle de encima todo aquello que sí es cambiante en este mundo***, como lo es el contexto sociocultural, la política, las opiniones, o el sentido común de la época. Si llegáramos a hablar de estas cosas sería solamente a modo de "información complementaria", porque lo verdaderamente gravitante en el relato son los ***contenidos matemáticos***.

3. Para construir la historia de la matemática debemos seleccionar cuidadosamente los ***descubrimientos más innovadores de la disciplina***, priorizando la creación original, realizada en su práctica totalidad por ***hombres*** (padres fundadores, héroes intelectuales).

4. Debemos relatar el ***progreso acumulativo*** de dichos descubrimientos, rastreando en el pasado los balbuceos matemáticos iniciales que nos llevarían, tarde o temprano, a los sofisticados conceptos matemáticos desarrollados en la ***Europa moderna***.

Como podemos ver, la historia de las matemáticas desde el relato usual no es nada más que la historia del progreso acumulativo de los conceptos matemáticos "puros", y de los hombres que los descubren y los desarrollan.

En resumidas cuentas, el relato usual es internalista (puntos 1 y 2), lineal (puntos 3 y 4), androcéntrico (punto 3) y eurocéntrico (punto 4).

Aunque actualmente estamos más atentos a evitar estos sesgos historiográficos, en general esta es la manera en que las personas -incluyendo a los propios matemáticos- ven el despliegue de esta disciplina, ya sea implícita o explícitamente, siendo conscientes de ello o no. Y también es la manera en que los expertos suelen comunicarlo al resto de las personas no-matemáticas, ya sea a través de charlas, talleres, libros, columnas, canales de YouTube o las redes sociales.

Una metáfora que encapsula la idea central del relato usual es la siguiente:

La historia de la matemática es la historia de las mentes humanas que viajan al mundo abstracto de las ideas matemáticas en búsqueda de territorios inexplorados, sobre los cuales ir poniendo sus banderas, para así ir ampliando cada vez más sus conquistas.

No es difícil ver cómo esta metáfora engloba los 4 puntos anteriores. En primer lugar, la metáfora nos muestra a las matemáticas fuera de nuestra vida mundana, dentro de un plano mental en el cual lo valioso son las ideas matemáticas, es decir, priorizamos el contenido matemático y no su contexto. El hecho de que esas mentes busquen conquistar territorios inexplorados nos sugiere que lo único valioso es la novedad, lo todavía no descubierto, y la propia noción de "conquistar cada vez más" nos lleva a la idea de una colonización progresiva del mundo matemático, es decir, el conocimiento siempre va progresando de manera acumulativa.

Es evidente el paralelo que podemos hacer de esto con la idea del "conquistador", de un Alejandro Magno que amplia sus dominios, siempre yendo más y más allá. Es la misma idea también del europeo que hace unos 500 años descubrió un territorio completamente ajeno a su realidad -América- el cual buscó dominar. Pero más sugerente -y moralmente más aceptable a los ojos modernos- es la metáfora mitológica de Prometeo, quien fue aquel que le robó el fuego a los dioses para llevárselos a los humanos. Es famoso el paralelo entre el fuego prometeico y el conocimiento humano, estando muy en línea con la idea de "las luces" en la Ilustración. De hecho, la noción de "traer algo novedoso y valioso a la humanidad" es el *leitmotiv* que mueve a científicos de todo el mundo, donde el fuego prometeico son los teoremas o los nuevos descubrimientos científicos, traídos ya no desde el Olimpo, sino desde las profundidades de la mente humana, destinados a disipar la oscuridad y la ignorancia.

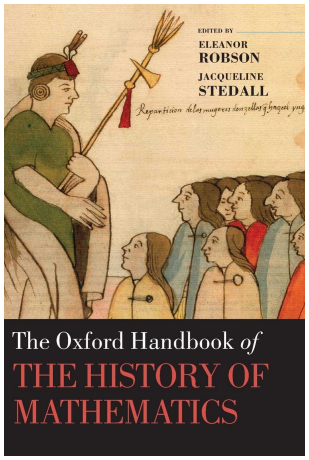
A pesar de lo convincente que nos pueda parecer el relato usual, su hegemonía no logró ser tan eterna como la disciplina que buscaba historizar. Allá en por los años 80 del siglo pasado fue que sus principios fundamentales comenzaron a resquebrajarse de manera sistemática, recibiendo el impulso de la historia social de la ciencia, los estudios culturales y los estudios de género. Estas nuevas visiones históricas han ido calando en el pensamiento de las y los historiadores más actuales, construyendo relatos muchos más sutiles del pasado, e involucrando aspectos antes invisibles. Ahora la historia de la matemática es algo mucho más interesante que simplemente un aburrido desarrollo lineal, internalista, androcéntrico y eurocéntrico, porque la mirada es mucho más amplia al considerar la matemática como un fenómeno cultural de gran complejidad. En particular, dicho quiebre de los años 80 ha desembocado en una serie de trabajos que tienen como distintivos los siguientes puntos:

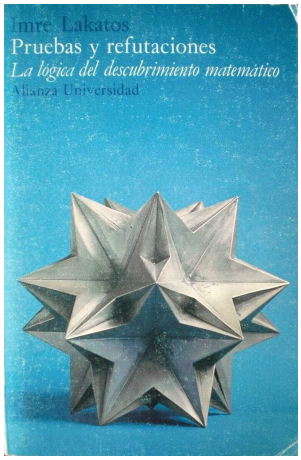
1. Una visión no-internalista de la matemática. Aquí destacamos el libro *The Oxford Handbook of The History of Mathematics*, editado por Eleanor Robson y Jacqueline Stedall (2009).

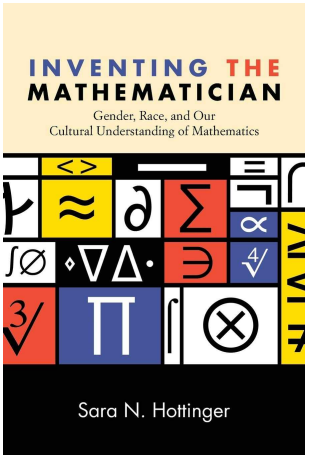
2. Una visión no-lineal del desarrollo matemático. Aquí destacamos a Imre Lakatos con su libro *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery* (1976).

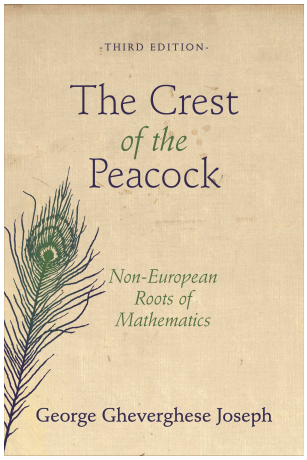
3. Una visión no-androcéntrica de la matemática. Aquí destacamos a Sara Hottinger con su libro *Inventing the Mathematician: Gender, Race, and Our Cultural Understanding of Mathematics* (2016).

4. Una visión no-eurocéntrica de la matemática. Aquí destacamos a G. G. Joseph con su libro *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics* (1991).









Hay que dejar muy claro que los enfoques recién mencionados no desprecian el contenido matemático puro ni tampoco miran con sospecha a los matemáticos hombres europeos, sino que simplemente buscan *ampliar* el relato usual, extendiendo sus fronteras geográficas y su alcance cultural, para así también poder apreciar las matemáticas de un cierto contexto como un mundo en sí mismo. Más que descartar el relato usual, la idea de estas nuevas perspectivas es ampliarlo, y entenderlo como algo (bastante) mejorable.

Lo ideal sería hablar de todos estos asuntos, pero como no tenemos todo el tiempo del mundo, hemos decidido en esta actividad concentrarnos en las relaciones entre matemática, astronomía y cultura en el contexto específico del Islam medieval. Para ello nos esforzaremos en hacer lo siguiente:

1. Evitaremos la visión eurocéntrica ampliando geográficamente el relato usual, focalizando nuestra atención en los territorios de la civilización islámica medieval.
2. Evitaremos la visión internalista apreciando las profundas relaciones entre matemática, astronomía, religión y sociedad en dicha cultura.
3. Mencionaremos historiadores que han dedicado sus vidas a estudiar estos temas.

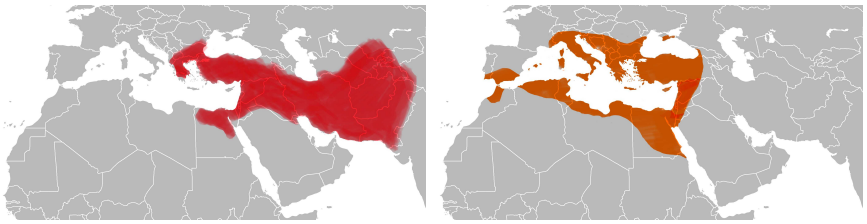
III. La civilización islámica dentro del relato usual

Debemos empezar haciéndonos una pregunta: ¿Cómo llegó el saber griego, de los siglos V-III a.C., al mundo europeo, más de un milenio y medio después?

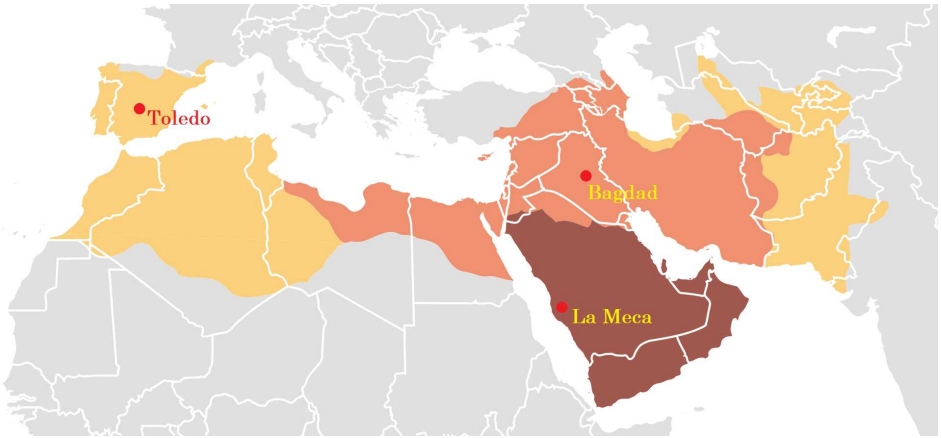
Notemos que este "salto" del conocimiento de los griegos hacia Europa es muy complejo de explicar por su enorme extensión temporal. Pensemos un poco; es tremendamente complicado conservar manuscritos en buen estado por tantos siglos, considerando que muchos de ellos eran de papiro o materiales frágiles. Tengamos presente que, incluso hoy en día, *un* miserable siglo es implacable con la gran mayoría de los objetos materiales que nos rodean. Y estos textos tuvieron que sobrevivir durante muchos muchos muchos años. ¿Cómo lograron entonces perdurar estos antiguos manuscritos griegos? Alguien tuvo que cuidarlos, aparte de copiarlos una infinidad de veces para que no se pierdan con el paso del tiempo. Y no solo copiarlos sin más, sino que enseñar el valor de dichos conocimientos a las generaciones siguientes para que perpetúen dichos saberes, replicándolos y transmitiéndolos, así una y otra vez. El proceso de transmisión fue muy complejo, y dependió de diversas culturas que vivieron entre África, Europa y Asia. Y dentro de todas estas culturas "protectoras de los saberes antiguos", la cultura islámica fue la que el relato usual considera como la más relevante.

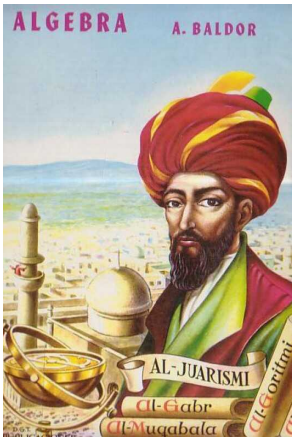
La civilización islámica fue la gran mediadora entre la cultura griega y la europea

¿Y cómo sucedió este proceso de "mediación"? Podemos condensar esta parte del relato como sigue: los saberes científicos griegos nacieron allá por el año 500 a.C., y luego de las expansiones de Alejandro Magno en 330 a.C. se esparcieron a todo lo que actualmente llamamos Grecia, Libia, Egipto, Turquía, Siria, Irak, Irán, y de Pakistán a Uzbekistán al Este (la imagen abajo a la izquierda muestra la extensión del Imperio Macedonio en el 323 a.C.). Dichos saberes crecieron y se conservaron durante siglos, principalmente en Persia, Siria, India y el Imperio Romano de Oriente (la imagen abajo a la derecha muestra la extensión del Imperio Romano de Oriente en el 555 d.C.).



Posteriormente surgió la religión islámica, la cual en una expansión infinitamente rápida que comenzó con el profeta Mahoma en Arabia Saudita en el 622 d.C., dominó muchos de los territorios recién mencionados, logrando una extensión enorme (la imagen abajo izquierda muestra la extensión del Imperio Islámico en el 750 d.C.). La civilización islámica supo apreciar el valor de los saberes que fue encontrando en dichos territorios, tomando con gran respeto los manuscritos que ahí manejaban, y los tradujo allá por el año 800, muchos de ellos en la famosa "Casa de la Sabiduría de Bagdad". Aquel era un centro financiado por el califato Abasí, el cual reunió no solo a los mejores pensadores del planeta en ese entonces, sino también valoró enormemente la obtención de manuscritos de todas partes del mundo conocido para ellos. Uno de los encargados de las traducciones de matemática en dicho lugar era nada más ni nada menos que el astrónomo-matemático Muhammad Al-Juarismi (~ 820), aquel que este relato usual considera el padre fundador del álgebra, y es quien aparece en la portada del famoso libro "Baldor de Algebra". También fue este hombre quien escribió sobre la "numeración india", tomando desde dichas latitudes lo que eventualmente hemos llamado los "números indo-arábigos".





La civilización islámica no solo se expandió en oriente abarcando Siria, Irán y parte de India, sino que también fue hacia occidente y conquistó el norte de África, llegando incluso hasta la Península Ibérica en el año 711. Durante algunos siglos hubo estrecho contacto entre musulmanes, cristianos y judíos que vivían en lo que actualmente llamamos España, y fue en Toledo, aproximadamente en el año 1150, donde una serie de eruditos, en un ambiente de tolerancia religiosa y cultural, tradujeron las obras científicas desde el árabe y las otras lenguas al latín. Esta es la llamada "Escuela de traductores de Toledo", que en realidad más que una institución formal fue un conjunto de traductores que trabajaron con relativa independencia en esa época. De ahí en adelante hubo una infinidad de copistas y traductores que se dedicaron a preservar estos manuscritos de conocimientos científicos, como por ejemplo los *Elementos* de Euclides que ya hemos mencionado antes, y de muchos otros pensadores antiguos, traduciendo todo a la lengua culta de Europa: el latín. Así fue como la Península Ibérica fue la principal puerta de entrada de la ciencia griega a Europa.

La civilización islámica, desde la perspectiva histórica usual que hemos condensado aquí muy resumidamente, fue solamente un punto intermedio de transmisión de saberes entre las verdaderas dos grandes culturas: la griega y la europea. Esta es la razón de por qué al inicio de esta actividad no mencionamos al mundo islámico cuando introdujimos el relato usual: como son meros "transmisores", el relato usual considera su labor como algo de menor relevancia, ya que desde esta perspectiva "transmitir la matemática" tiene menor valor que "crear nueva matemática" (recordar el punto 3, el de "los descubrimientos innovadores").

Todo lo que hemos mencionado aquí conforma un panorama general bastante certero del papel jugado por el mundo musulmán en el relato usual, que no es más que la perspectiva histórica con la cual la cultura europea construyó la visión del pasado de su matemática. Los griegos, en este caso, no son más que los "precursores" de una matemática europea que vendría en el futuro, todavía por nacer. Los musulmanes, también desde esta perspectiva, no fueron más que los "transmisores" de dicha cultura griega para que los europeos -los verdaderos destinatarios de esas obras- las aprovecharan.

Esta mirada tan eurocentrista de la historia de la matemática fue cuestionada solamente hace un par de décadas, y en este último tiempo han surgido otro tipo de miradas hacia el pasado, donde la meta de los eventos históricos no es "llegar al mundo europeo" ni tampoco "llegar hasta el presente", sino entender ***cada cosa en su tiempo y en su lugar***. Por ello es que en esta actividad no veremos a las otras culturas matemáticas solamente como un "paso intermedio para llegar al presente", sino también como un fin en sí misma, como ejemplos de la enorme riqueza y unicidad de las relaciones entre ciencia y sociedad.

No estudiaremos la matemática de la civilización islámica con el objetivo de ver qué descubrimientos matemáticos sirvieron de precedentes a las matemáticas europeas.

Estudiaremos cada cosa en sus propios términos, intentando ver en su propio contexto cómo vivieron ellos mismos sus propias relaciones entre ciencia y sociedad.

Por ello podemos preguntarnos: ¿qué pasa si ponemos nuestro foco sobre las matemáticas y la astronomía de la civilización islámica, viéndolas como un objeto en sí mismo en vez de verla con la mirada "usual"? Nos daremos cuenta de que las matemáticas y la astronomía islámica fueron increíblemente complejas, ricas en contenido y aplicaciones, y muy coherentes con la cultura general de ese entonces. Este es un mundo nuevo y desconocido del que usualmente no tenemos noticia, y eso es así precisamente porque vivimos dentro de la cultura occidental, la cual hereda su visión del pasado en términos del relato europeo.

IV. La civilización islámica fuera del relato usual: 3 problemas

Para aproximarnos a las matemáticas y la astronomía del mundo musulmán debemos reconocer el enorme aporte de uno de los más importantes historiadores de la astronomía y la matemática islámica medieval en el mundo: David A. King. Este historiador de las ciencias, que nació en 1941, ha dedicado su vida entera a comprender la profundidad de ambas ciencias en el Islam medieval, y el siguiente fragmento revela lo valioso de su enfoque:

"La mayoría de los historiadores de la ciencia islámica se han concentrado en el conocimiento científico que ha sido transmitido a Occidente, pero al hacer esto han tendido a pasar por alto la esencia de la ciencia islámica.

De hecho, la mayoría de los relatos modernos sobre la ciencia en el mundo islámico medieval, tanto de escritores occidentales como también musulmanes, han ignorado lo que puede ser bien llamado los aspectos islámicos de la ciencia islámica."[33]

Notemos el inicio de este fragmento. *"... se han concentrado en el conocimiento científico que ha sido transmitido a Occidente..."*. ¡Esto es precisamente lo que veníamos discutiendo sobre el relato usual! Un enfoque que solo se concentra en el contenido (conocimiento científico) y cuya importancia se mide en relación al valor que le entregaría futuramente al occidente que lo recibiría.

[33] Con estas palabras empieza David King su artículo *Science in the service of religion: the case of Islam* (1990).

Ahora vamos a la segunda parte. *"...tanto escritores occidentales como también musulmanes han ignorado lo que puede ser bien llamados los aspectos islámicos de la ciencia islámica."* Aquí vemos que el relato usual -con sus altas dosis de eurocentrismo- tiene un poder de seducción tan grande, que incluso los historiadores musulmanes caen en su embrujo (¡siendo musulmanes!). Tan atractivo es el relato usual que los historiadores musulmanes consideraron que los intereses originales de sus propias gentes no fueron tan gravitantes en el relato como sí lo fueron aquellas cosas que los futuros europeos sí valoraron. David King nos invita entonces a superar este colonialismo cultural, sugiriéndoles a los estudiosos de las ciencias islámicas medievales que se empapen de manera honesta del contexto y de las problemáticas reales que sus gentes vivieron.

¿Pero qué significa eso de los aspectos islámicos de la ciencia islámica? Es simplemente considerar el peso que tuvo la propia cultura islámica dentro de los problemas astronómico-matemáticos que con tanto esmero sus gentes trabajaron, y para comprender eso necesitamos saber ciertos aspectos básicos de la cotidianidad musulmana.

Comencemos observando que en el mundo islámico lo religioso y lo civil siempre han estado estrechamente relacionados. Por esa razón la cotidianidad de sus gentes involucra un buen número de ritos religiosos, los cuales a su vez involucran muchos aspectos astronómicos y matemáticos descritos en el Sagrado Corán o en los hadices. De hecho, la religión islámica es la que más involucra asuntos astronómicos en sus prácticas piadosas, más que el cristianismo, por ejemplo.[34]

David King nos explica que hubo 3 grandes problemas matemáticos-astronómicos-religiosos que los astrónomos musulmanes desarrollaron a lo largo de la Edad Media. Los mencionaremos no con la intención de mostrar complicados teoremas y fórmulas matemáticas, sino que nos esforzaremos en explicar por qué las matemáticas tenían sentido en esta cultura. Por ello no nos focalizaremos en el contenido (¡perdónanos, relato usual!) sino en mostrar la importancia cultural de una astronomía cuantitativa en la civilización islámica. En resumen, priorizaremos la pregunta

¿Por qué era importante la matemática ahí?

por encima de la pregunta

¿Qué teoremas matemáticos descubrieron ahí?

Comencemos.

[34] Ver el inicio del artículo *Science in the service of religion: the case of Islam* (1990). Adicionalmente, este artículo contiene una detallada explicación de los 3 problemas astronómico-matemáticos que mencionaremos a continuación.

Problema 1. La regulación del calendario musulmán. Las festividades y los rituales religiosos en el mundo islámico se basan en un año distinto al nuestro, ya que el tiempo se mide con relación a la Luna y no al Sol como en occidente. Para nosotros el año está definido en términos del paso del Sol por las constelaciones zodiacales, durando en promedio 365 días divididos en un total 12 meses de 30 o 31 días. Para los musulmanes el año lunar equivale a 12 meses lunares, donde cada mes lunar dura entre 29 y 30 días. Por ello un año musulmán típico dura 354 días, 11 días menos que el año solar occidental.

Por ejemplo, nosotros estamos ahora en el año solar 2025 d.C. (después de Cristo), pero los musulmanes están en el año lunar 1447 AH (año de la Hégira)[35]. La Hégira fue la emigración del profeta Mahoma desde la Meca a la ciudad de Medina en la actual Arabia Saudita, en el año 622 d.C., y es el evento que da inicio al calendario islámico[36].

Cada mes del mundo musulmán comienza con un evento astronómico: el primer día del mes es aquel en que aparece por primera vez, luego de una luna nueva, la luna creciente después de la puesta de Sol.

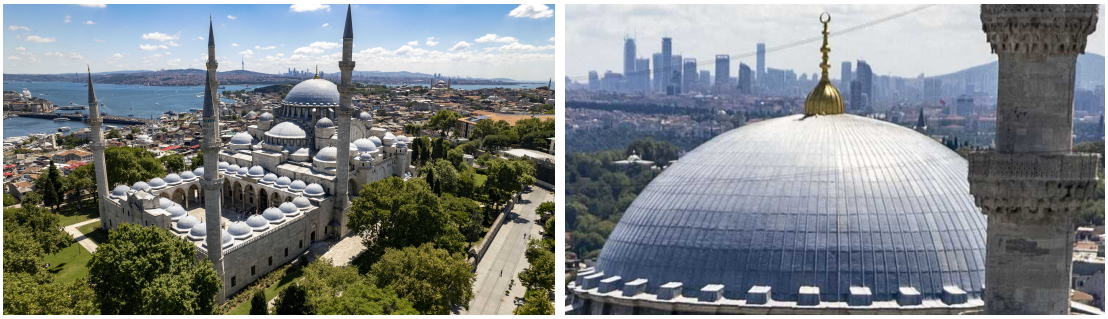
Es precisamente ahí donde radica la complicación del asunto: ya hemos mencionado en la actividad anterior que el movimiento de la Luna no es para nada simple de determinar en el cielo. Siendo más específicos, saber con antelación el momento exacto de esta "primera creciente" (uñita) requiere de una serie de complejos cálculos en relación al movimiento de la Luna con respecto a las estrellas -el llamado *mes sidéreo* de $\sim 27{,}32$ días, cuyo ciclo forma una "eclíptica lunar"- pero a su vez también requiere de estudiar cómo es que esta "eclíptica lunar" también se mueve completa en relación a la eclíptica solar de manera cíclica, -en el llamado *periodo de precesión nodal* de $\sim 18{,}6$ años-. Todo esto debía ser también estudiado en conjunto con el ciclo de las fases lunares -el llamado *mes sinódico* de $\sim 29{,}53$ días-. Muchos astrónomos musulmanes se esforzaron en trabajar todas las herramientas matemáticas posibles para determinar la posición de la Luna en el cielo, relacionando los ciclos anteriores con la distancia angular entre el Sol y la Luna, para así predecir con exactitud la "uñita" lunar.

[35] En realidad nuestro año 2025 d.C. se solapa con los años 1446 y 1447 AH, por el desfase de $\sim$11 días ya mencionado. Aunque para mayor precisión a un año en nuestro calendario se le deba asociar dos años en el calendario musulmán, de aquí en adelante tomaremos solamente uno de ellos, por lo general el más antiguo, por una cuestión de simplicidad.

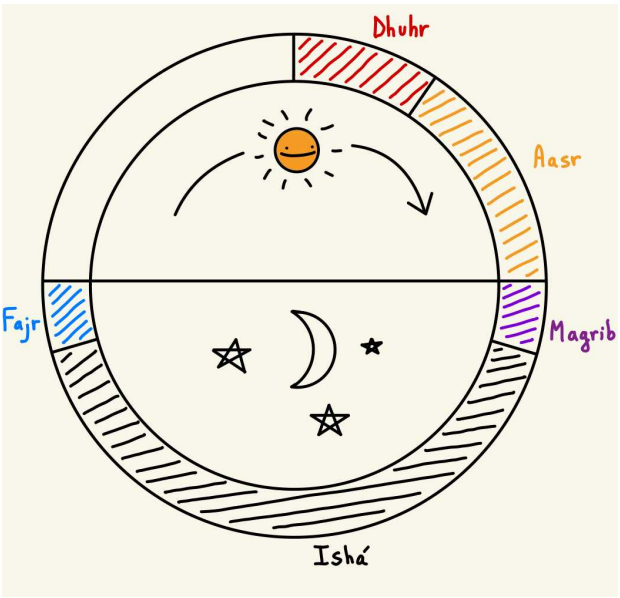
[36] Posteriormente hablaremos de fechas de astrolabios y las mencionaremos en ambos calendarios, con la consideración hecha en la nota al pie de página anterior.

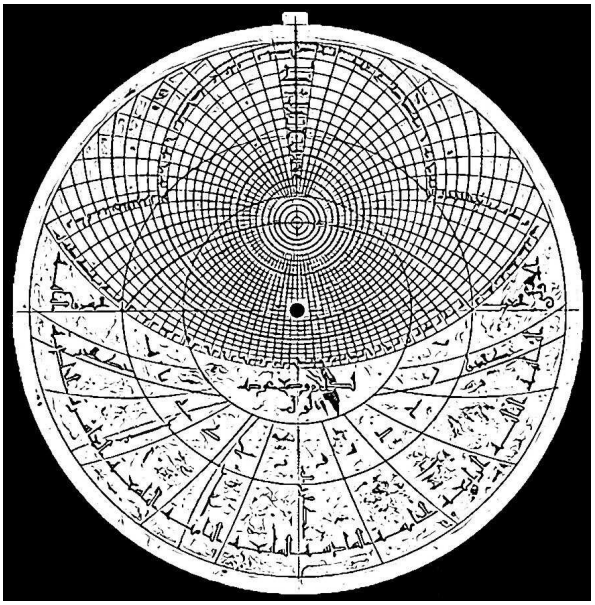
Saber con precisión el inicio y el fin de un mes era y sigue siendo un asunto de enorme importancia, ya que en el año musulmán existe un mes muy importante, llamado Ramadán, en el cual los fieles deben hacer ayuno desde la salida hasta la puesta del Sol. El fin de dicho mes es celebrado en toda la comunidad musulmana la fiesta del Eid al-Fitr, y un error en su cálculo preciso puede llevar a los fieles a un término anticipado del ayuno (lo cual es pecado), o a confusiones con relación a la coordinación de la mencionada festividad.

Por último, mencionar que la importancia de la Luna queda patente tanto en las banderas de algunos países musulmanes (ver abajo las banderas de Turquía, Libia y Túnez, respectivamente) como en su arquitectura (ver abajo la Mezquita de Suleimán en Estambul, cuyo minarete [torre] tiene en su punta una lunita creciente).

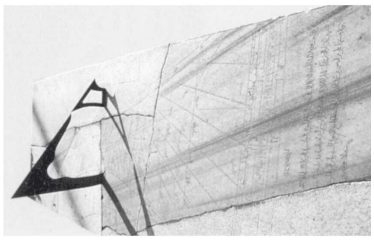


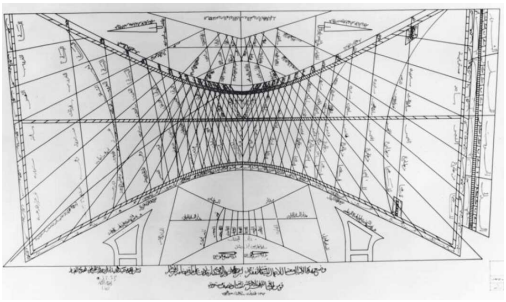
Problema 2. Las horas de los rezos. Los musulmanes tienen que rezar 5 veces durante el día, durante ciertos tramos temporales que están definidos de manera astronómica.



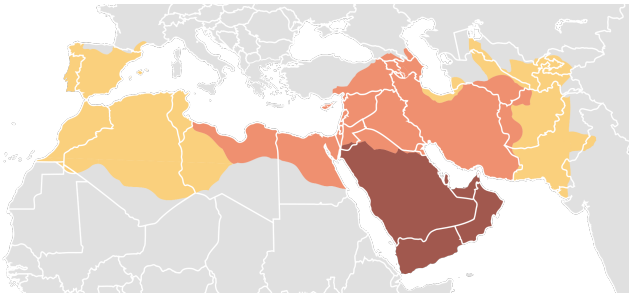


Aunque los tiempos de los rezos están claramente definidos en el tímpano de un astrolabio planisférico como el anterior[37] -con su línea del horizonte, su línea crepuscular y su eje Norte-Sur del mediodía- la determinación de estos importantes momentos fue realizada principalmente con el uso de relojes de Sol o con enormes tablas que indican su posición durante cada día del año, jugando el astrolabio un papel secundario. El astrónomo Ibn al-Shatir construyó en el año 773 AH (∼1371 d.C.) un precioso reloj de Sol en la Mezquita Omeya de Damasco, el cual servía para marcar algunos de estos rezos.



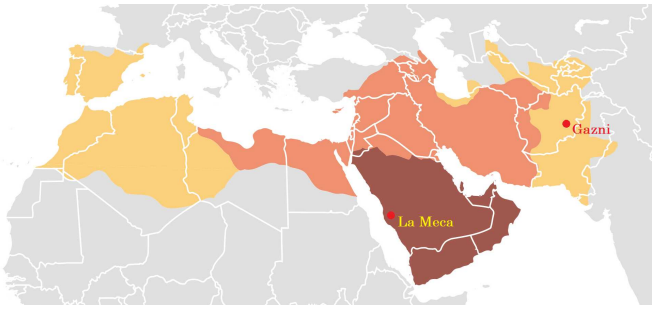


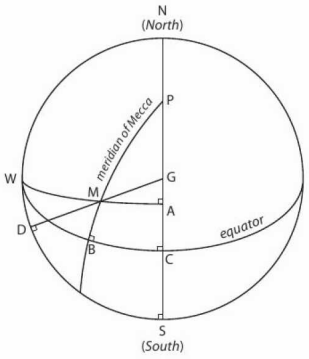
Problema 3. La determinación de la dirección sagrada, la quibla. No olvidemos que los musulmanes deben rezar dirigiéndose hacia la Kaaba en la ciudad de la Meca, actual Arabia Saudita, y ello requiere un conocimiento de geografía que no es para nada trivial. Consideremos que la civilización islámica ocupaba un territorio gigantesco, que en su mayor extensión fue de más de 11 millones de kilómetros cuadrados (en 750 d.C.), tal como vemos en el mapa a continuación.



[37] El tímpano aquí mencionado es un boceto digital inspirado en un astrolabio conservado en el Museo de Historia de la Ciencia de Oxford (Inglaterra), código 59034. Está firmado por el astrónomo al-Khama'iri de Sevilla, y fechado en 621 AH (∼1224 d.C.). Este tímpano funciona para la latitud de 36.5°, muy similar a la del centro de operaciones del proyecto: Concepción (36.8°).

Considerando la cantidad de territorios y de posibles direcciones a mirar desde ellos hacia la Meca, muchos musulmanes dirigían sus rezos mediante métodos aproximados e inexactos. Sin embargo, hubo varios astrónomos que dedicaron sus esfuerzos a resolver el problema de manera absolutamente exacta, siendo uno de ellos el matemático al-Biruni, que trabajó por el año 1000 d.C. en la zona oriental de la civilización islámica. Dentro de los varios aportes que este hombre realizó a la astronomía y matemática, uno muy importante fue su descripción del cálculo de la dirección sagrada desde la ciudad de Gazni, en el año 1025 d.C. (Gazni está en el actual Afganistán)[38].





En esencia, el asunto radica en estudiar la información que se desprende del triángulo esférico que forman Gazni, la Meca y el polo norte terrestre. El estudio de los triángulos sobre la esfera es parte de la (prácticamente olvidada) disciplina de la trigonometría esférica[39], la cual permite concluir de manera precisa el ángulo hacia la Kaaba. En el caso de Gazni, al-Biruni obtuvo un azimut ligeramente mayor que 250°.

En general los problemas anteriores eran tratados de manera aproximada por la mayoría de la gente común, acorde a lo que los expertos en ley islámica dictaban. Por lo general estos últimos no estaban muy de acuerdo con usar las herramientas de la astronomía matemática, ya que en algunas ocasiones apelaban a que los conocimientos geométricos requeridos para estos cálculos provenían de infieles (griegos o indios), ajenos al Islam.[40]

[38] Al-Biruni describió estos cálculos en un libro que escribió en 1025, traducido desde el árabe al inglés en 1967 por Jamil Ali, con el nombre *La determinación de las coordenadas de las posiciones para la corrección de distancias entre ciudades*.

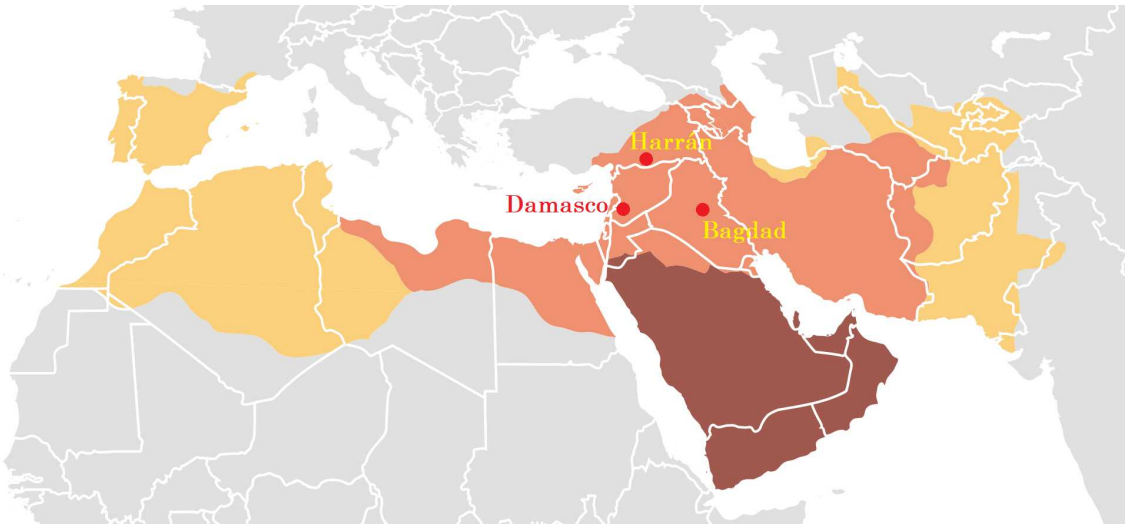
[39] Para mayor detalle sobre cómo al-Biruni realizó sus cálculos, con altas dosis de trigonometría esférica, sugiero leer el libro del historiador de la trigonometría Glen van Blummelen titulado *Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry* (2013), específicamente las páginas 66-71.

[40] Para mayor detalle sobre este interesante punto ver el artículo de David King titulado "On the role of the muezzin and the *muwaqqit* in medieval islamic society" (1996), página 292.

V. La civilización islámica fuera del relato usual: el astrolabio

Uno de los principales símbolos de la ciencia islámica es el astrolabio, prácticamente desde los orígenes del propio Islam. Y aunque es cierto que existieron herramientas matemáticas y tratados sobre astrolabios previos al surgimiento del Islam, tanto en el mundo greco-alejandrino como también en el Imperio Romano de Oriente, los instrumentos ahí construidos eran bastante rústicos. Fue en el contexto islámico donde estos instrumentos fueron desarrollados de la manera más sublime, ya que tuvieron una enorme importancia cultural.

En su expansión hacia oriente y occidente, el mundo musulmán tuvo su primer contacto con estos instrumentos provenientes del Imperio Romano de Oriente a través de la ciudad de Harrán, en la actual frontera entre Siria y Turquía, allá por el año ∼750 d.C. [41]



Dicho encuentro coincidió temporalmente con el asesinato de los califas omeyas que tenían su capital en Damasco (actual Siria), y el nuevo califato entrante, el de los abasíes, ubicó su capital en Bagdad (en 761 d.C., en la actual Irak). Por ello tiene sentido que la gran mayoría de los astrolabios musulmanes "tempranos" que tenemos en museos y colecciones del mundo hayan sido fabricados en Bagdad entre los años 800 y 1000. A pesar de que algunos de ellos están firmados, el más antiguo de ellos que está simultáneamente firmado y ***fechado*** es el del astrónomo Nastulus[42]. Este hombre firmó el instrumento y lo fechó en el año 315 AH (∼927 d.C.), y está resguardado actualmente en la colección de arte islámico de al-Sabah, en Kuwait. La imagen a continuación a la izquierda muestra el astrolabio de Nastulus, mientras que a la derecha tenemos un hermoso astrolabio firmado por el astrónomo al-Khujandi y fechado 374 AH (∼984 d.C.)[43].

[41] Sobre los primeros astrolabios musulmanes es conveniente citar la obra maestra de David King *In Synchrony with the Heavens: Studies in Astronomical Timekeeping and Instrumentation in Medieval Islamic Civilization* (2 volúmenes), específicamente el capítulo "The oldest known astrolabe, from 8th century Baghdad, or What nobody knew was in the Archaeological Museum in Baghdad: The oldest astrolabe in the world" (página 403 del volumen 2).

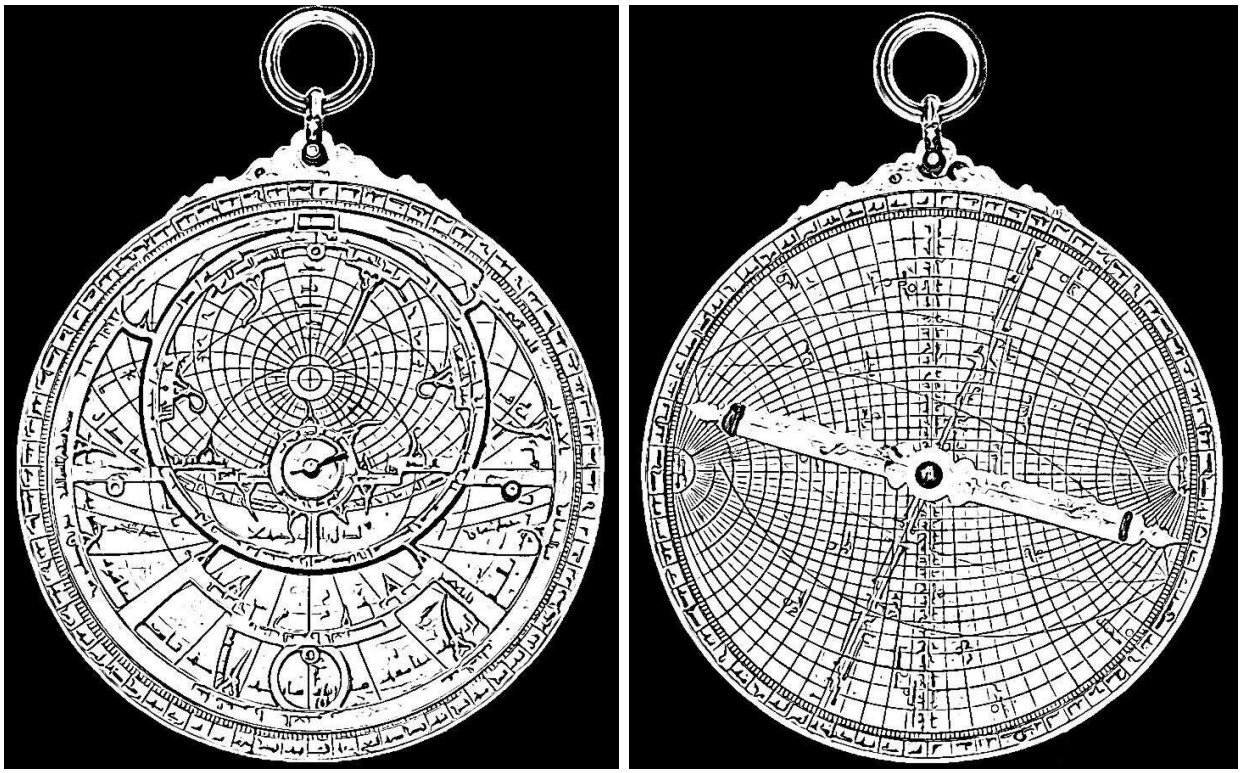
[42] Para un análisis detallado del astrolabio de Nastulus sugiero leer la mencionada obra *In Syncrony With The Heavens... volumen 2*, páginas 470-476. Hay que destacar que hay astrolabios más antiguos que el de Nastulus, pero no tienen la datación exacta: este es el primero.

[43] Este astrolabio pertenece al Museo de Arte Islámico de Doha (Qatar), código SI.5.1999.

Los musulmanes siguieron perfeccionando sus astrolabios, tanto en oriente como occidente, hasta que en la taifa de Toledo, allá por el año 1050, los astrónomos Azarquiel e Ibn-Jalaf trabajaron bajo el mecenazgo del cadí al-Andalusi. ***Cada uno diseñó un astrolabio que no depende de la latitud, es decir, funcionan para cualquier parte del mundo. Los llamaremos "astrolabios universales".*** No olvidemos que el tímpano de un astrolabio "normal" funciona para una latitud única. Si bien los astrolabios normales solían tener varios tímpanos extraíbles e intercambiables, no existía ningún astrolabio que fuera capaz de funcionar, con solamente 1 tímpano, para cada latitud del mundo.

El astrolabio de Ibn-Jalaf está excelentemente explicado en una serie de 6 videos de YouTube en el canal de Oscar Ferro, un programador argentino que se ha dedicado no solamente a estudiar estos instrumentos, sino también a construirlos acorde a las instrucciones de textos medievales, y a enseñarlos en su canal mediante ejemplos muy detallados.

Por otro lado, podemos ver un ejemplo de lámina universal de Azarquiel en la siguiente imagen, presente en el reverso de un interesante astrolabio realizado en el norte de África en el siglo XIII[44].



Es interesante mencionar que, aunque el problema matemático de construir un instrumento plano independiente de la latitud estaba resuelto con los astrolabios universales de Toledo en el siglo XI, los astrónomos siguieron construyendo astrolabios normales. Podríamos preguntarnos:

¿Para qué seguir construyendo astrolabios "normales", si los astrolabios universales los superaron matemáticamente?

La respuesta en este caso va más allá de las matemáticas: un astrolabio no es solamente un objeto para realizar cálculos astronómico-matemáticos, ya que es un objeto multidimensional que involucra aspectos científicos, artísticos y simbólicos.

Por ello es importante mencionar a la historiadora del arte y de la ciencia Azucena Hernández Pérez. Nacida en 1956, Azucena es una de las mayores expertas en astrolabios de al-Ándalus en el mundo, lo cual es importantísimo en nuestra visión de la astronomía medieval, ***ya que el relato usual considera a al-Ándalus como la puerta de entrada de la ciencia griega al mundo europeo.***

[44] Este astrolabio, al igual que el de al-Khama'iri, pertenece al Museo de la Historia de la Ciencia de Oxford, código 41122. No tiene autor conocido, ni tampoco sabemos de qué lugar preciso del norte de África proviene. Por otro lado, es importante destacar que este museo posee la mayor colección de astrolabios del mundo, aproximadamente unos 170. Por último, agregar que este astrolabio, aunque posee varios tímpanos, el que muestra la imagen a la izquierda funciona para la latitud de 31° Norte, que aquí en Chile sería aproximadamente la latitud de Ovalle.

Azucena escribió un precioso libro titulado *Astrolabios en al-Ándalus y los reinos medievales hispanos*, y su libro gemelo *Catálogo razonado de los astrolabios de la España medieval*, ambos publicados en 2018, en los cuales nos insiste en que estos instrumentos no solo fueron importantes por su dimensión matemática, sino que sus aspectos estéticos y simbólicos fueron tanto o más gravitantes en términos culturales.

Azucena nos dice que para estudiar correctamente estos instrumentos debemos abordarlos en toda su riqueza[45], considerándolos simultáneamente como:

1. Representación de un universo dinámico, con un giro intuitivo.
2. Símbolo de poder, cultura y prestigio.
3. Apoyo a la enseñanza de la astronomía.
4. Ejemplo de elegancia y suntuosidad.

Miremos un astrolabio: es un objeto precioso (ver página siguiente). Encapsula la idea de un universo cerrado, donde en un objeto plano podemos ver de manera nítida cómo giran las estrellas y el Sol. Y más encima la realización de las estrellas y la eclíptica es bellísima, llena de detalles que revelan los gustos estéticos de las gentes que los construían y/o solicitaban.

El astrolabio fue y es un modelo portable del universo, y muchos autores musulmanes lo consideraron como tener simbólicamente el universo en sus manos. El astrolabio a continuación, firmado por Abd al-Karim al-Misri y fechado en 633 AH (∼1235 d.C.), es un ejemplo de cómo se mezcla la precisión matemática con la dimensión estética[46].

[45] Ver el libro de Azucena Hernández Pérez titulado *Astrolabios en al-Ándalus y los reinos medievales hispanos* (2018), especialmente las páginas 16-17.

[46] Este astrolabio pertenece a la colección del British Museum (Inglaterra), código 1855,0709.1

Desde esta perspectiva simbólica y estética, el astrolabio universal, más que ser un "avance", tenía serias desventajas: a pesar de proveer de soluciones universales, que para los matemáticos son tan importantes, no tiene una araña que emule el cielo giratorio como los astrolabios normales, lo cual lo hace mucho menos intuitivo. Aparte de eso, requerían mayor esfuerzo para comprender cómo usarlos. Esto hace que el astrolabio normal se mantuviera vigente, ya que muestra de manera plana el giro tridimensional del universo, en un objeto portátil de enorme elegancia y calidad estética.

A pesar del carácter simbólico de este instrumento, es muy interesante notar que prácticamente la totalidad los astrolabios conservados en los museos y colecciones privadas no presentan marcas de uso[47]. Claramente esto indica que o fueron usados muy muy poquito, o derechamente nunca fueron usados. ¿Si nadie los usaba, entonces para qué tanto trabajo en diseñarlos y construirlos? Lo que sucede es que estos eran instrumentos de lujo, muchas veces decorativos, y tenemos registro de aquello en escritos de las élites gobernantes de la antigüedad, que encargaban estos instrumentos a artesanos para entregarlos como regalos diplomáticos o también como regalos familiares. El ejemplo a continuación es bastante ilustrativo a este respecto.

En 1376, el rey Pedro IV obsequió a su hija Leonor de Aragón un astrolabio como regalo de bodas, con el futuro rey de Castilla Juan I. La carta que acompañaba al regalo dice:

Muy querida hija [...] una red [araña] del astrolabio que se mueve [...] hay tres láminas de latón: en una de sus caras tiene el número 38 y en su otra cara tiene el número 39 [...] Donde está el zodiaco encontrarás todos los signos del cielo y algunas estrellas fijas, y por lo dicho en el zodiaco puedes saber las horas del día y por las estrellas fijas las horas de la noche.[48]

Es claro que Pedro IV el ceremonioso entiende, al menos en términos generales, cómo usar un astrolabio, *y podemos inferir que su hija igual lo comprende, por los términos técnicos que éste usa para dirigirse a ella.* Las láminas con los números 38 y 39 no son más que las dos caras de un mismo tímpano, asociados a las latitudes de Córdoba (38°) y Toledo (39°).

VI. La civilización islámica fuera del relato usual: el muwaqqit

Hemos visto que desde bien temprano en el Islam ha habido personas dedicadas a los asuntos astronómico-matemáticos, pero desde aproximadamente en el año 1280, en el Sultanato Mameluco[49], apareció por primera vez un oficio muy interesante: el ***muwaqqit***[50].

[47] Ver *The Astrolabe* (2018) de David King, página 53.

[48] Traducido desde la cita realizada en el libro *Astrolabios en al-Ándalus...* páginas 165-166.

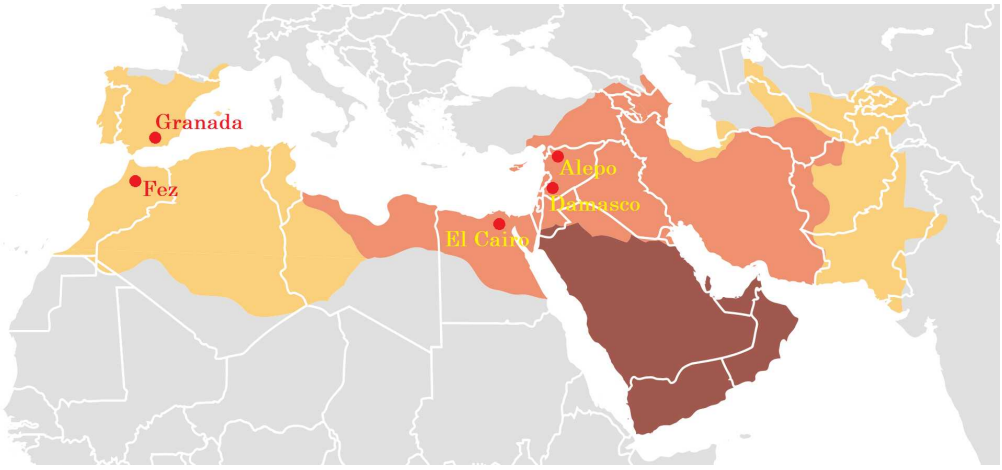
[49] La imagen muestra en color naranjo la extensión geográfica del Sultanato Mameluco en el año 1279.

[50] Hay un estudio muy completo e interesante sobre la figura del muwaqqit en el artículo de David King titulado "On the role of the muezzin and the *muwaqqit* in medieval islamic society" (1996). Sobre el contexto de la astronomía en el Sultanato Mameluco sugiero leer el artículo de David King "The astronomy of the Mamluks" (1983).

Un muwaqqit era un astrónomo-matemático contratado en una mezquita ("templo islámico") o una madraza ("universidad islámica") para trabajar problemas matemáticos de astronomía aplicada a la religión islámica. Podríamos considerar que los muwaqqit fueron los primeros "matemáticos profesionales" de la historia, en el sentido de que recibían un sueldo por trabajar específicamente temas matematicos, aunque el valor de su trabajo en ese contexto no provenía exclusivamente de innovar o extenderse en esos temas, sino de trabajar en servicio de los requerimientos religiosos.

Parte importante de su labor era hacer matemáticas relacionadas con los 3 grandes problemas que ya mencionamos, siempre colaborando con la transmisión y enseñanza de estos saberes a los futuros muwaqqits, para así poder entregar información precisa sobre los aspectos astronómicos del Islam a las personas encargadas de avisar los rezos. La persona encargada de hacer los llamados a la oración conforman un oficio mucho más antiguo que el del muwaqqit, cuyo nombre era el de ***muecín***. Los muwaqqit, por lo tanto, debían trabajar junto a los muecines los momentos precisos del llamado a las 5 oraciones diarias, siendo estos últimos quienes desde el minarete de las mezquitas avisaban con la potencia de su voz los momentos indicados para sus prácticas piadosas.

De la misma manera en que el Islam se expandió por el mundo en poco más de 100 años, el oficio del muwaqqit también lo hizo en un tiempo similar, ya que en el año 1380 (100 años después de su primera aparición documentada) tenemos registros de muwaqqit en varios puntos del territorio islámico, como por ejemplo Granada (actual España); Fez (actual Marruecos); El Cairo (actual Egipto); Damasco y Alepo (actual Siria).



Según el ya mencionado historiador David King, quien ha estudiado a los muwaqqit desde hace décadas, es importante destacar que no existen registros de muwaqqit en la parte más oriental de la civilización islámica, desde Irak hacia el Este. A pesar de ello, el autor deja abierta la pregunta: *"¿Podemos concluir que el oficio del muwaqqit no se extendió hacia el Este a lo que más tarde llegaría a ser el Imperio Otomano?"*[51].

Uno de los muwaqqits más destacados de toda la historia fue Ibn al-Shatir, de quien ya hemos mencionado que construyó un hermoso reloj de Sol en Damasco en el año 773 AH (∼1371 d.C.). Al-Shatir trabajó como el jefe del equipo de los muwaqqit en la Mezquita Omeya de Damasco, que fue uno de los centros más importantes de la astronomía mundial en esa época. Y no solamente construyó ese reloj de Sol, sino que también fabricó diversos instrumentos, entre ellos algunos astrolabios planisféricos.

Por otro lado, aparte de la figura del muecín y la del muwaqqit, tenemos en el mundo islámico medieval la figura del ***miqati***, quien era un astrónomo-matemático no asociado a ninguna institución específica.

El mismo David King nos cuenta sobre uno de los miqati más destacados de la historia: el astrónomo Ibn al-Sarraj. Este hombre fue contemporáneo de al-Shatir, y desde la ciudad de Alepo (muy cerca de la ciudad de Damasco donde trabajaba este último) desarrolló un nuevo astrolabio planisférico universal, que recordemos funciona para todas las latitudes del planeta. No olvidemos que todos los astrolabios que hemos estudiado en nuestras actividades funcionaban para una latitud específica, pero este astrolabio de al-Sarraj funciona para cualquier lugar del mundo. Milagrosamente todavía tenemos un ejemplar de este astrolabio, del que podemos ver una imagen en la página siguiente[52].

[51] Ver el artículo "On the role..." página 288.

[52] Este astrolabio es una de las mayores joyas matemáticas de todo el mundo medieval, *el instrumento astronómico más sofisticado de toda la la historia hasta el año 1600*, acorde a David King en su obra *In Synchrony with the Heavens*, volumen 2, página 694. Este ejemplar único esta fechado en el año 729 AH (∼1328 d.C.), y está resguardado en el Museo Benaki (Grecia), código 13178.

Como ya hemos comentado, también hubo muwaqqits en otras latitudes. Por ejemplo, en la Mezquita Aljama de Granada tuvimos a los muwaqqits Ahmad y Husayn Ibn-Baso, quienes eran padre e hijo. Estos hombres trabajaron por el año 1300, un poco antes de al-Sarraj y de al-Shatir en oriente, y también construyeron un astrolabio universal, del cual presentamos algunas láminas en la página siguiente[53], y con el cual terminamos esta sección.

[53] Las imágenes del precioso astrolabio a continuación fueron proporcionadas por la propia Azucena Hernández Pérez, quien a pesar de estar retirada de la investigación formal al día de hoy, ayuda desinteresadamente a iniciativas que promuevan estos instrumentos medievales en el mundo (como este proyecto). Este instrumento está firmado por Ibn-Baso hijo, fechado en el año 704 AH (∼1304 d.C.), y está actualmente conservado en el Museo de Arte Islámico de Doha, código MW.394.2007.

Arriba a la izquierda tenemos el frente completo del astrolabio, con su bella araña y una lámina que representa la latitud de Almería (36.5°, muy similar a la latitud de Concepción en el hemisferio sur). Arriba a la derecha tenemos el reverso del astrolabio, con su alidada sobre los calendarios zodiacal y juliano.

Abajo a la izquierda tenemos una lámina universal, es decir, una lámina que funciona para todas las latitudes del planeta. Esta lámina difiere de las realizadas por Azarquiel e Ibn-Jalaf, y probablemente sirvió de inspiración para el astrolabio de al-Sarraj (pues comparte algunos de sus círculos). Finalmente, abajo a la derecha tenemos una lámina que representa la latitud de Granada (37.5°), hogar de los Ibn-Baso.

VII. Conclusiones

A modo de conclusión, podemos decir sin duda alguna que el astrolabio es un instrumento científico-artístico que nos permite ampliar la historia usual de la matemática y de la ciencia desde varios ángulos:

1. Es un lugar común decir que la Edad Media, a grandes rasgos entre el año 500 y el 1500, fue una época oscura para las ciencias y el conocimiento. Esta actividad deja bastante claro que en dicho periodo histórico hubo personas que desarrollaron instrumentos y conceptos científicos fascinantes, lo cual demuestra la falacia anterior.

2. La historia de la ciencia usualmente consideró al mundo árabe como meros transmisores de una ciencia que va de Grecia a Europa, y muy pocas veces como un fin en sí misma. Esta perspectiva usual ignora los intereses y problemáticas propias que dinamizaban su vida intelectual, lo cual muestra el eurocentrismo con el que fue (y todavía es, pero en mucho menor medida) escrita la historia de la ciencia. Y mirando nuestro propio país: ¿Sería posible analizar la matemática de Chile en sus propios términos?

3. Es posible aprender sobre la historia de las matemáticas estudiando instrumentos científicos, y no recurriendo exclusivamente a manuscritos o libros.

4. Los astrónomos musulmanes que hemos mencionado, como Azarquiel, Ibn-Jalaf, los Ibn-Baso, al-Sarraj y al-Shatir fueron maestros de la geometría conectada con la astronomía, y por ello podemos decir sin duda que ellos fueron los verdaderos ***Geómetras del Cielo***.

5. Si vemos el astrolabio planisférico solamente como un paso intermedio hacia el astrolabio universal, entonces estamos ignorando que *el trasfondo matemático de estos instrumentos es solamente 1 de las múltiples caras del asunto*, y por ello estaríamos pasando por alto todas las interrelaciones que hemos discutido entre sociedad, religión y matemáticas que hicieron prosperar estos instrumentos en la Edad Media.

7. En última instancia, la historia siempre la construyen las personas humanas, que seleccionan del pasado lo que les interesa y lo que son capaces de comprender. Para un matemático (quien tradicionalmente ha querido cargar sobre sus hombros la labor de escribir la historia de su disciplina) lo verdaderamente importante al mirar el pasado son los contenidos matemáticos "puros", ojalá sin relación con otros temas. Aparte de lo anterior buscará lo novedoso, por lo que variaciones del mismo problema son consideradas de menor importancia. Ambos requisitos (la pureza descontextualizada y la novedad) restringen enormemente aquello que consideramos como las matemáticas del pasado, y es un fiel reflejo de la estrechez de miras del matemático que está analizando ese pasado. Pero no debería extrañarnos, ya que estos dos requisitos son precisamente aquellos con los que un matemático -y los científicos de las ramas afines- son implacablemente evaluados en su vida académica, y por ello son los únicos lentes con los que cuentan y con los que son capaces de analizar el pasado de su disciplina.

Sugerencias para realizar la actividad

Para esta actividad necesitamos tener 5 mazos de cartas de historia de la matemática, para entregarles a los 4 grupos de estudiantes y al grupo de profesores.

Esta actividad tiene 3 partes, cuyas descripciones y tiempos ideales son los siguientes:

1. Primero recibiremos a los profesores y sus estudiantes en la sala donde realizaremos la actividad, donde firmarán la lista. Cuando ya hayan llegado todos, les pediremos que se ordenen en los grupos creados de manera aleatoria para esta actividad (que no coincidarán con los de las actividades pasadas), los cuales estarán proyectados en el telón. Considerando que no hay test de entrada en esta ocasión, todo esto debiera estar listo como mucho 10 minutos después de la hora de inicio agendada.

2. Ya con todos los grupos correctos sentados, empezaremos la actividad de historia entregándoles 1 mazo de cartas *casi completo* a cada grupo (ver abajo), para luego comenzar la exposición con el apoyo del PPT oficial. La duración ideal de esta parte será de 1 hora y 55 minutos, considerando dentro de este tiempo dos pausas intermedias.

3. Terminado el punto anterior el profesor y los monitores verificarán que la línea de tiempo esté correctamente realizada. Luego de eso les pediremos de vuelta los mazos, para así poder entregarles el test de salida a cada profesor y a cada estudiante. Como el test de salida tiene 4 breves preguntas debieran resolverlo en como mucho 10 minutos. Finalmente, les pediremos a todos los participantes que nos esperen a la salida para tomarnos una foto en conjunto.

En resumen, considerando los posibles retrasos y las pausas intermedias, la actividad completa está pensada para ser realizada en como mucho 2 horas y 15 minutos. El horario ideal para realizar esta actividad es entre las 10:00 y las 12:15 hrs, durante cualquier día entre lunes y jueves.

Ahora pasaremos a detallar cuáles son los puntos que debemos tocar sí o sí en la actividad de historia, enmarcados en la parte 2 mencionada anteriormente.

En primer lugar, es importante destacar que para agilizar el aprendizaje y mantener la atención de los participantes, al inicio de la actividad les entregaremos a cada grupo (incluyendo al de los profesores) un pequeño mazo de cartas *exceptuando 4 cartas aleatorias que retendrá el monitor*. Los grupos deberán ir ordenando sus 20 cartas en una línea temporal sobre sus mesas con el transcurso de la actividad. Las 4 cartas faltantes serán entregadas cuando el profesor termine la exposición, con la finalidad de mantener la tensión de la línea temporal incompleta y evitar que se copien las líneas mirando a los demás grupos.

La correcta implementación de la línea de tiempo requerirá de la coordinación y la atención de los miembros de cada grupo, que adicionalmente estarán supervisados por los monitores en la sala. De vez en cuando estos irán lanzando pequeñas sugerencias a los grupos para que vayan completando sus líneas correctamente.

Sección I. Introducción

En esta sección lo más importante es dejar claro que la historia de la matemática es una parte fundamental de la historia de la ciencia, que a su vez es parte esencial de la historia de la cultura occidental.

Para comprender esa historia y nuestro desconocimiento sobre ella debemos hablar de la importancia de los referentes y de sus plataformas de visibilidad, mencionando algunos Nobel y medallistas Fields.

Concluir que aunque la cultura general no promueva ni referentes ni logros matemáticos, una búsqueda propia mediante libros e internet nos llevará inevitablemente a los matemáticos y los descubrimientos que conforman ***el relato usual***.

Sección II. El relato usual de la historia de la matemática

En esta sección lo relevante es exponer 5 de los hitos centrales de la historia de la matemática, para luego así pasar a ver los 4 pilares sobre los cuales se construye dicho relato: internalismo, linealidad, androcentrismo y eurocentrismo.

Luego de eso comentaremos cómo cada uno de esos puntos ha sido abordado en la historiografía desde los años 80, gracias a los estudios culturales, de género, y la historia social de la ciencia. Hacer hincapié en que existen libros que hablan de esos temas, para que los participantes luego investiguen.

Comentar que todos estos nuevos enfoques buscan ampliar (y no despreciar) el relato usual. De todos estos enfoques, en el proyecto decidimos focalizarnos en las relaciones entre matemática, astronomía y religión en el Islam medieval, entre los siglos VIII y XIV.

Sección III. La civilización islámica dentro del relato usual

Comenzar con la pregunta central: ¿cómo sobrevivieron los manuscritos griegos durante casi 1500 años, para llegar al mundo europeo? Concluir que el proceso involucró un complejo proceso de enseñanza y replicación, y desde el relato usual la civilización islámica fue la gran *protectora* de estos saberes, *mediando* entre las 2 grandes culturas: la griega y la europea.

Mencionar que desde el relato usual lo importante fue que el Islam consideró apropiado tomar los conocimientos griegos e indios, los cuales tradujo en Bagdad al árabe, para así luego estos ser traducidos desde el árabe al latín en Toledo, y finalmente llegar a Europa.

Finalizar diciendo que este relato no considera a la civilización musulmana como un fin en sí misma, sino como un paso intermedio para el presente europeo. La sección siguiente remediará ese problema, porque estudiaremos por qué los pensadores musulmanes consideraban culturalmente valioso el estudio de las matemáticas y la astronomía en su propio contexto.

Terminada esta sección haremos una pausa de 5 minutos.

Sección IV. La civilización islámica fuera del relato usual: 3 problemas

Aquí introducimos al historiador David King y su llamada de atención a los historiadores de la ciencia islámica.

Luego estudiaremos *los 3 grandes problemas astronómico-matemático-religiosos* que desarrollaron los astrónomos musulmanes.

Con respecto al primer problema, el de la regulación del calendario musulmán, destacar la importancia de la luna y de estudiar su movimiento en el cielo. Resaltar que el calendario musulmán es distinto al nuestro en occidente, medido desde la Hégira. Insistir en la dificultad de los cálculos relativos a la luna, y que esta está presente tanto en las banderas como en la arquitectura musulmana.

Con respecto al segundo problema, el de las horas de los rezos, subrayar el hecho de que los 5 rezos obligatorios en el Islam se realizan en momentos del día definidos astronómicamente: puesta y salida del Sol, crepúsculos, mediodía y el rezo de mediatarde (Aasr). Importante insistir en el carácter *secundario* de los astrolabios en estos cálculos, siendo los relojes de Sol y las tablas astronómicas los medios más utilizados para estos fines.

Con respecto al tercer problema, el de la determinación de la quibla, insistir en que tenía sentido porque el territorio cubierto por la civilización islámica era gigantesco, pudiendo uno dirigirse a La Meca desde direcciones muy diversas.

Destacar que hubo intentos de solución exacta al problema mediante trigonometría esférica, pero que en general se abordaba de manera aproximada acorde a algunas autoridades religiosas que consideraban estos cálculos *de infieles*.

Terminada esta sección haremos una pausa de 5 minutos.

Sección V. La civilización islámica fuera del relato usual: el astrolabio

Comentar que el astrolabio no lo inventaron los musulmanes, sino que es un instrumento que proviene del mundo griego y que llegó a sus manos a través de la ciudad de Harrán. Una cosa es inventarlo (cosa que no hicieron) y otra es tomarlo y transformarlo de un instrumento rudimentario a uno con un carácter matemático y estético absolutamente extraordinario.

Cada vez que mencionamos un astrolabio relevante (en esta y la sección siguiente) es bueno detenerse un poquito para que los participantes vean la enorme belleza de estos instrumentos, así como el nivel de detalle estético y matemático que tanto los caracteriza.

Destacar que los astrolabios universales no dejaron obsoletos a los "normales", porque estos últimos eran más intuitivos y eran mejores representaciones simbólicas de un universo giratorio.

Introducir a la historiadora Azucena Hernández Pérez, que destaca las múltiples dimensiones de los astrolabios y la importancia de estos instrumentos en al-Ándalus, que acorde al relato usual fue *la puerta de entrada de la ciencia griega a Europa*.

Con el ejemplo del astrolabio que Pedro IV le regala a su hija Leonor de Aragón debería quedar claro que la realeza comprendía las bases del funcionamiento de un astrolabio, que aparte de ser un instrumento astronómico, era también una símbolo de poder y de cultura.

Sección VI. La civilización islámica fuera del relato usual: el muwaqqit

Esta última sección está dedicada a resaltar el hecho de que en la civilización islámica, específicamente en el Sultanato Mameluco, surgió la figura del muwaqqit.

Al mostrar ejemplos de muwaqqit o miqati, detenerse en sus nombres, años y lugares donde trabajaron, ya que es importante destacar que todos trabajaron circunscritos a un contexto religioso que daba sentido a su trabajo, y que todo esto sucedió en lugares y tiempos ajenos al relato usual.

Capítulo 5: El mundo cerrado y el universo infinito

Palabras clave. *Geocentrismo, Ptolomeo, civilización islámica, Nicolás Copérnico, heliocentrismo, rotación terrestre, traslación terrestre, infinitud del universo, Alexandre Koyré, cosmos medieval, Robert Fludd, Anima Mundi, experimento mental, universo íntimo, William Blake, perspectiva lineal, Giotto, Perugino, Pascal, Owen Barfield, embrión medieval.*

Contenido de la actividad

I. Visiones geocéntrica y heliocéntrica del universo

En las actividades anteriores nos hemos convencido de varias cosas:

1. Tiene sentido representar el universo por una esfera giratoria, donde nosotros estamos quietos en su centro.

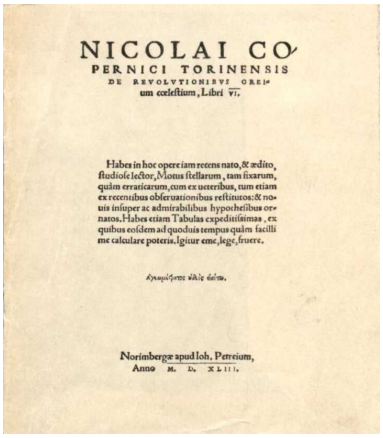
2. Los instrumentos derivados de esta representación, ya sea la esfera celeste, la esfera armilar o el astrolabio, no hacen más que confirmar que dicho modelo tiene sentido.

3. Hubo varias civilizaciones que desarrollaron esta cosmología y sus instrumentos respectivos, y nosotros nos hemos dedicado a estudiar la civilización islámica medieval.

Que nuestro planeta esté quieto en el centro de un universo esférico giratorio es lo que denominamos como "la visión geo-céntrica", ya que Gea significa Tierra en griego. Ya hemos visto en las actividades anteriores que el giro de las estrellas y el Sol nos lleva de manera natural a considerar la visión geocéntrica como una excelente manera de entender el universo, y así fue como lo consideraron todas las culturas del mundo durante toda la existencia humana hasta hace cuatro siglos.

Pero una cosa es la formulación cualitativa de un universo geocéntrico, y otra es la *formulación matemática* de esta visión. Esta última fue desarrollada formalmente en el famoso libro *Almagesto*, escrito por el astrónomo griego Claudio Ptolomeo en el año 200 d.C. Esta fue la manera en que la enorme mayoría de los astrónomos-matemáticos de todas las culturas en la Edad Media (incluyendo a los de la civilización islámica que hemos estudiado en la actividad 4) estudiaron los movimientos del cielo con un éxito incomparable, que duró aproximadamente desde el 200 al 1600 d.C.

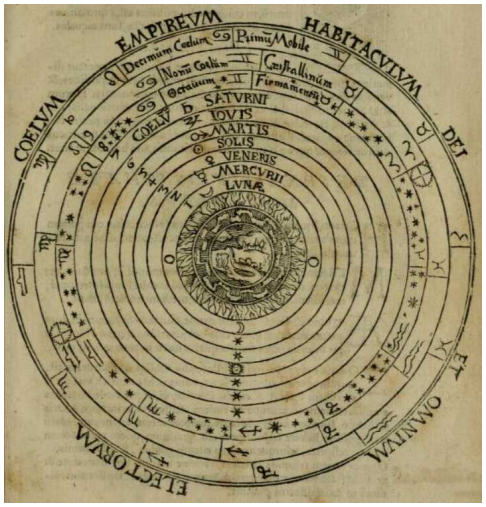
Aunque en el pasado hubo algunas poquitas excepciones históricas a la concepción del universo que propone la visión geocéntrica, en el año 1543 hubo un libro que la desafió cara a cara, y que eventualmente cambió el rumbo de la historia del pensamiento. Hablamos del libro *De Revolutionibus Orbium Coelestium* [Sobre las revoluciones de las orbes celestes], escrito por el astrónomo polaco Nicolás Copérnico[54].

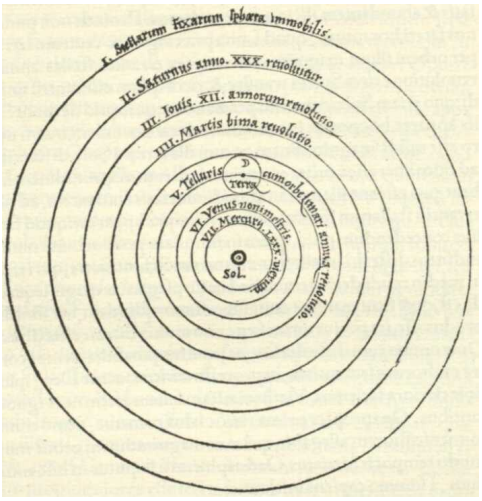

NICOLAI CO
PERNICI TORINENSIS
DE REVOLVTIONIBVS ORBI
um coelestium, Libri VI.

Habes in hoc opere iam recens nato, & ædito, studiose lector, Motus stellarum, tam fixarum, quàm erraticarum, cum ex ueteribus, tum etiam ex recentibus obseruationibus restitutos. Habes nouis insuper ac admirabilibus hypothesibus ornatos. Habes etiam Tabulas expeditissimas, ex quibus eosdem ad quoduis tempus quàm facillime calculare poteris. Igitur eme, lege, fruere.

Norimbergæ apud Ioh. Petreium,
Anno M. D. XLIII.

Este hombre no solamente criticó la visión geocéntrica de Ptolomeo, sino que construyó una propuesta alternativa nunca antes vista con tanta claridad y coherencia. La idea genial de Copérnico es proponer un universo en el cual todos los movimientos que observamos en el cielo realmente se deben a los movimientos de nuestro planeta, retirándose este último del centro del universo para cederle el lugar al Sol.





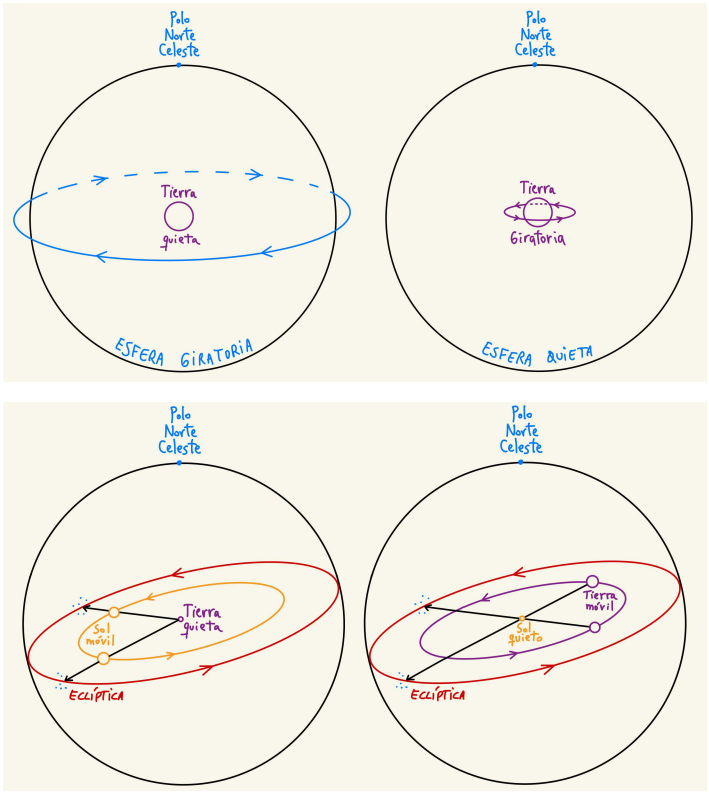
[54] El propio Copérnico nos habla de sus precursores: "eran de esta opinión los Pitagóricos Heráclides, Ecfanto y Nicetus de Siracusa, según Cicerón, que suponían a la Tierra dando vueltas en el centro del mundo [rotación terrestre]". También nos dice: "Y se cuenta que Filolao el Pitagórico, matemático no vulgar, hasta el punto de que para verle Platón no dudó en dirigirse a Italia, según transmiten los que escribieron la vida de Platón, opinó que la tierra giraba, e incluso que se movía con varios movimientos, y que era uno más entre los astros". Debemos considerar adicionalmente que en la biblioteca de Copérnico estaba la obra *El Arenario* de Arquímedes de Siracusa, destacadísimo matemático griego, que nos dice: "Aristarco de Samos ha propuesto una hipótesis según la cual las estrellas fijas y el Sol permanecen inmóviles, y que la Tierra gira en torno al Sol siguiendo la circunferencia de un círculo, y que el Sol está en el centro de este círculo". Las dos citas iniciales fueron sacadas de la edición crítica del libro de Copérnico en castellano, *Sobre las revoluciones* (1987), editado por tecnos.
En resumen, esas "poquitas excepciones" que menciono era posible contarlas con los dedos de las manos.

Por ello es que la denominamos una visión "helio-céntrica", ya que Helios significa Sol en griego. Desde esta perspectiva tenemos que todos los planetas giran en torno al Sol, ¡incluyendo a la Tierra, que estaba tan quietita en la visión geocéntrica!

Veamos dos ejemplos de cómo Copérnico reinterpreta los fenómenos geocéntricos.

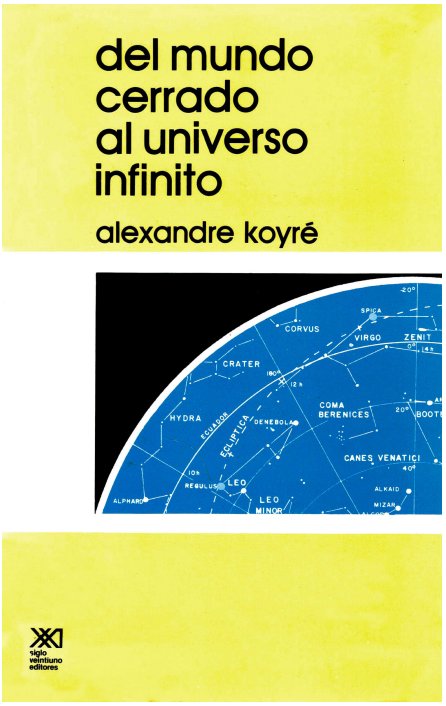
En primer lugar, el movimiento rotatorio **aparente** de las estrellas es el resultado de la rotación **real** de nuestro propio planeta, no de la esfera de las estrellas, las cuales están quietas en la esfera del universo. Este es el llamado movimiento de **rotación terrestre**, y el contraste está representado en la primera de las imágenes abajo.

En segundo lugar, el movimiento **aparente** del Sol alrededor de nuestro planeta es el resultado del movimiento **real** de la Tierra alrededor del Sol, y la eclíptica es resultado de cómo **nosotros** nos movemos, en la llamada **traslación terrestre**. Este contraste está representado en la segunda de las imágenes abajo.



De esta manera Copérnico consideró que ya no era necesario que las estrellas giraran, y por ello las posó sobre una enorme esfera de "estrellas inmóviles" (que en la imagen heliocéntrica anterior dice *I. Stellarum Fixarum Sphaera immobilis*). Ya hemos discutido que si son las estrellas las que giran, entonces una esfera es el "recipiente" más adecuado, pero si están quietas, ¿Por qué deberían "descansar" en una esfera? Con esta interrogante Copérnico abrió la posibilidad de que el recipiente del mundo no sea una esfera, sino que fuera *infinito*.

Históricamente sucedió que la cultura europea fue la primera en declarar y sostener de manera colectiva una visión del mundo que llevó a la idea de un universo infinito, la cual mantenemos hasta el día de hoy. Esto queda patente en el famosísimo libro del historiador de la ciencia Alexandre Koyré: "*Del mundo cerrado al universo infinito*", escrito en 1957 y editado en castellano por siglo veintiuno editores.



Porque abrazar de manera colectiva el paso de un universo cerrado y esférico a un universo abierto e infinito fue una verdadera revolución intelectual, tan importante a nivel cultural como lo fue la Revolución Francesa o la llegada del ser humano a la Luna.

Para las personas del siglo XXI que han recibido una educación occidentalizada, las sucesivas cosmologías post-copernicanas son lo verdaderamente real, y todo eso del universo geocéntrico, pre-copernicano, no es nada más que un asunto obsoleto.

¿Hemos entonces vivido una gran mentira con este proyecto, que es abiertamente pre-copernicano?

Es chistoso, porque aunque hayamos trabajado en el marco geocéntrico durante las 4 actividades anteriores; y aunque hayamos verificado con nuestras propias manos que los instrumentos funcionan y representan de manera apropiada las posiciones reales observadas del Sol y las estrellas; a pesar de todo esto, probablemente más de alguna de las personas que participaron en el proyecto habrá pensado que todo esto de la esfera celeste es solamente una reliquia del pasado, sin mayor valor para nosotros ahora.

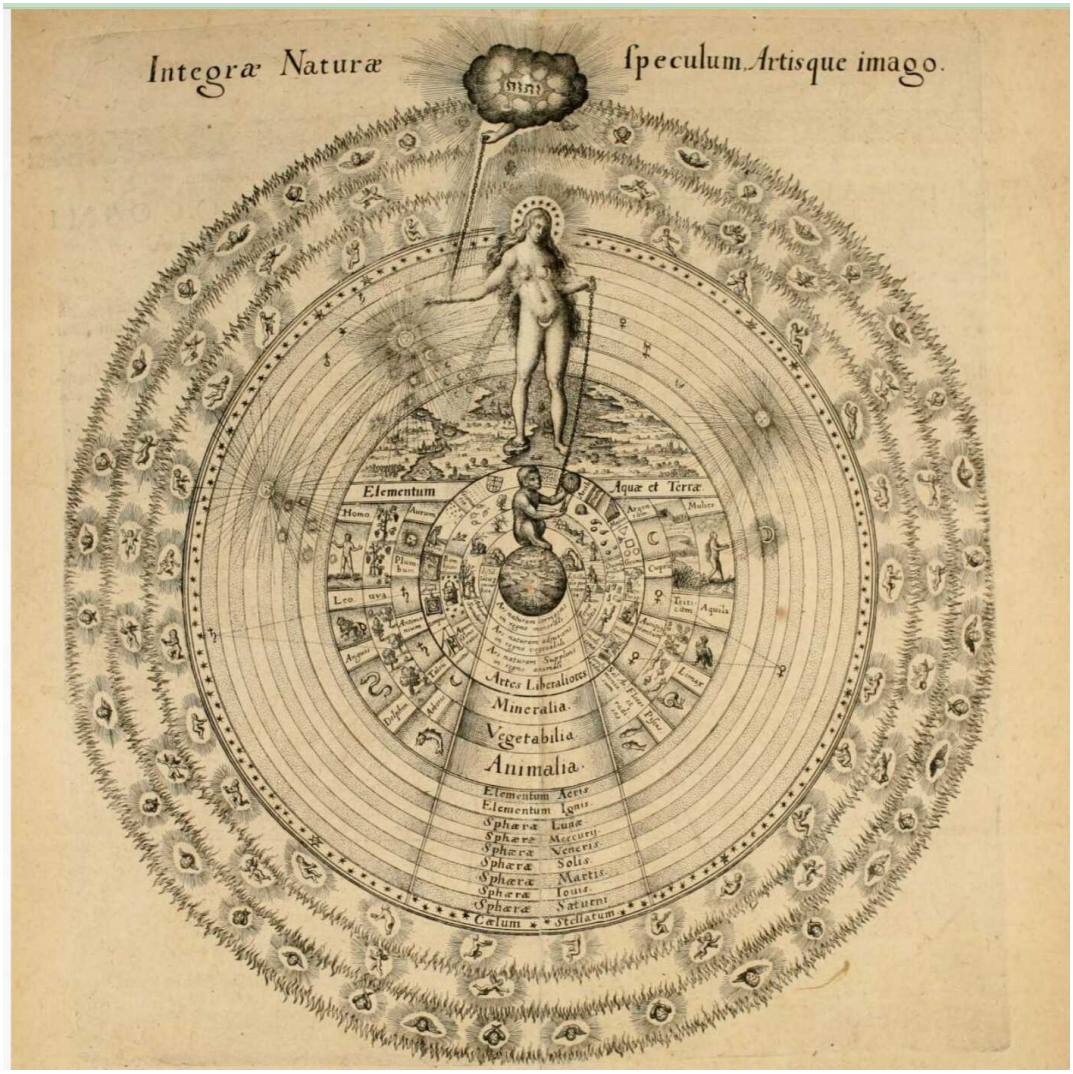
Hagamos memoria: en la actividad pasada resaltamos el hecho que cuando uno lee sobre la historia de la matemática o de las ciencias en general, el relato usual va "de menos a más", buscando transmitir el carácter progresivo y acumulativo del conocimiento. Por ello, la respuesta natural a la pregunta sobre qué importancia tiene la visión geocéntrica del universo sería simplemente decir que dicha teoría fue solamente un paso intermedio hacia la verdad, una teoría parcial e inmadura del universo, la cual Copérnico vino a destituir con la fuerza de su teoría heliocéntrica. Copérnico habría sido entonces el Prometeo que trajo el fuego del heliocentrismo al mundo terrenal.

Pero en esa misma actividad 4 también discutimos sobre la importancia de comprender cada cosa en su tiempo y en su lugar. Desde esta perspectiva podríamos hacer un esfuerzo y pensar sobre por qué les hacía tanto sentido a estas gentes de dicha época un universo cerrado. Y la cuestión se sanja tomando a esta gente en serio.

Para ellos la visión geocéntrica no tenía nada de absurdo: no solamente era una representación certera de la realidad, tanto a nivel de cálculos y observaciones, sino también, y más importante, les permitía comprender las distintas jerarquías del universo y el lugar del ser humano dentro de ellas.[55]

[55] En la Edad Media, tanto en el mundo islámico como en el mundo cristiano, tenemos una fuerte influencia de la cosmología aristotélica-ptolemaica, que considera que el universo está conformado de esferas concéntricas que van desde la Tierra en su centro a las estrellas en su superficie, pasando por la Luna y los planetas. Los movimientos se transmiten de las esferas externas a las internas, y trascendiendo dichas esferas, el espacio, el tiempo y la racionalidad humana, pero otorgando fundamento y significado al universo entero, están los dominios divinos, como el *Empíreo* cristiano.

Porque en el universo pre-copernicano todo tiene un lugar y un significado. La siguiente imagen del erudito inglés Robert Fludd (1617) nos muestra algunas de esas relaciones, donde vemos la Tierra en el centro del universo, con un mono sobre ella que representa lo material e instintivo, atado al Alma del Mundo (*Anima Mundi*), que a su vez está atada a lo más sublime: la nube que lleva inscrita la palabra Dios (en hebreo).



Así vemos que el *Anima Mundi*, atravesando las esferas divinas y también las esferas de las estrellas y los planetas, sirve de mediadora entre lo divino y lo terrenal. Y ahí están el hombre y la mujer, en el borde más externo de la zona terrenal, siendo parte de esas interacciones entre el centro y el borde, entre lo humano y lo divino. Por ello la metáfora apropiada del mundo medieval es la del feto dentro del útero, ya que tal cual el ser medieval se sabe parte de un mundo que lo acoge y que está lleno de significado, el pequeño ser *sabe* que su vida está íntimamente conectada con la de la madre que lo envuelve.

Para intentar comprender este asunto, sobre cómo es posible que los seres humanos antiguos consideraran como verdadero un universo cerrado y finito que los envuelve tal como un útero envuelve al feto -cosa que como modernos nos resulta absolutamente ajena-, hagamos el siguiente experimento mental, que será el último que haremos en este proyecto.

II. Experimento mental: intento de un universo cerrado

En primer lugar, cerremos nuestros ojos y escuchemos atentamente. Hay cosas que podemos percibir más lejos y otras más cerca, lo cual dependerá de la intensidad y calidad del sonido de los objetos que escuchemos. Por ello, nuestra percepción de los sonidos nos entrega una manera de medir "qué tan lejos" están los objetos externos.

Ahora supongamos, siempre con los ojos cerrados, que nuestro sentido de la audición se va amplificando poco a poco. Esto significa que gradualmente iremos escuchando más objetos y de manera más clara, lo cual se traduce en dos cosas:

1. Escucharemos cosas más lejanas (antes inaudibles), o sea, nuestros oídos "abarcarán más espacio".

2. Las cosas que ya sentíamos cerca estarán "todavía más cerca".

Por ello, a medida que nuestra audición se fue ampliando, vamos percibiendo cada vez más objetos externos, a la vez que los percibimos cada vez más cerca. *Es como si nuestros oídos abrazaran cada vez más y más del mundo.*

Lo interesante es imaginar qué pasaría si nuestros oídos estuvieran completamente purificados, o sea, si tuviéramos una audición perfecta. ¿Qué pasaría en esta extraña situación? ***Oiríamos todo***, por lo cual escucharíamos todos los objetos del mundo, y a la vez estarían todos tan cerca nuestro que descubriríamos que ***todo el universo está "en primer plano"***. De esta manera, una audición perfecta nos llevaría a que el universo entero se transformaría en una envoltura perfecta y ajustada del sujeto que escucha. ¡Lo externo y lo interno se disuelven, y toda la extensión del mundo es parte de nosotros!

Una idea similar es lo que escribía el poeta William Blake hace más de 200 años:

"Si las puertas de la percepción se limpiaran, todo aparecería al hombre tal como es, infinito."

Lo más brutal de este experimento mental es descubrir que dicha envoltura estaría tan pero tan pegada al sujeto, que éste sería incapaz de distinguir entre el mundo externo y su mundo interno.

Ahora repitamos este experimento mental, pero al revés. Supongamos que tenemos una audición perfecta, la cual nos entrega un universo en primer plano, que nos envuelve completamente y del cual somos incapaces de separarnos. Si poco a poco fuéramos perdiendo nuestra capacidad auditiva, percibiríamos cómo los objetos se van alejando gradualmente de nosotros, y el universo dejaría de estar en primer plano. Ahí aparecería la noción de cercanía o lejanía, y en consecuencia, ya habremos perdido la conexión íntima con el universo.

Y ahora viene lo interesante. Si en vez de pensar en términos auditivos pensamos en términos de lo visual, el paralelo es bastante lógico: una persona con la visión perfecta percibiría el mundo como una envoltura en primer plano, mimetizándose completamente con el todo, percibiéndolo de manera íntima e instantánea.

Y al revés: la pérdida gradual de dicha visión amplificada lo llevaría a percibir poco a poco la lejanía y cercanía de los objetos, y así mismo perdería progresivamente esa intimidad con el universo. Ese proceso será gradual, y correrán en paralelo dos cosas: por un lado, irá en aumento su capacidad de percibir esas distancias, catalogando las cosas como "más cercanas" o "más lejanas"; y por el otro lado, irá disminuyendo su conexión interior con el universo y con cada una de sus partes.

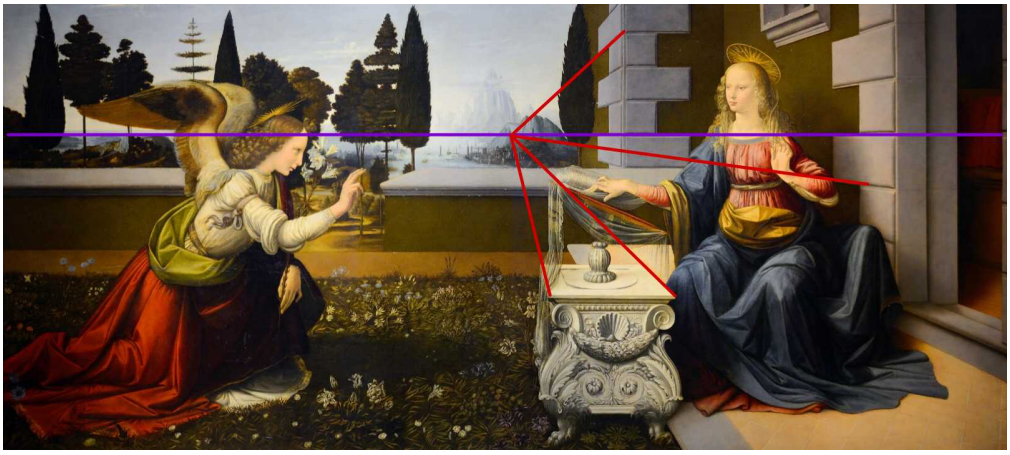
Con esto hemos terminado el experimento mental, y ahora iremos a los hechos históricos que apoyan esta manera de comprender la relación del ser humano con el espacio.

III. La perspectiva lineal y el heliocentrismo

Si el ser humano se hace más y más consciente de la cercanía y lejanía de las cosas, y adicionalmente cuenta con las condiciones socio-culturales adecuadas, puede dar un salto cualitativo y **construir un procedimiento preciso e infalible para cuantificar esa profundidad espacial**. Esto fue precisamente lo que sucedió en la Italia del 1400, lugar y momento en el que fue creada la primera teoría de la perspectiva lineal.

¿Pero qué es esto de la perspectiva lineal? La perspectiva lineal es una metodología matemática que permite plasmar el espacio tridimensional sobre un plano bidimensional, mediante el uso de la línea del horizonte y de los puntos de fuga.

En la imagen abajo podemos ver la famosa *Anunciación* de Leonardo da Vinci (∼1475), donde las líneas mutuamente paralelas convergen en un único punto, el llamado *punto de fuga.* La línea morada está formada de todos los puntos a la altura de la visual del que plasmó esta pintura, la llamada *línea del horizonte.*



La perspectiva lineal, en su formulación más madura, fue la toma de conciencia definitiva del espacio por parte del ser humano. Su adopción generalizada, acontecida históricamente a inicios del 1500, sucede no por coincidencia en la misma fecha en que Copérnico amasó sus ideas heliocéntricas por primera vez[56].

Antes de la perspectiva líneal y las ideas copernicanas, la gran mayoría de las personas percibían el mundo más inclinado al primer plano que a nuestra visión actual, lo cual queda patente en la siguiente pintura de Giotto[57] ($\sim$ 1300):

[56] No olvidemos que Copérnico compartió entre sus cercanos sus ideas heliocéntricas por primera vez poco antes del año 1514, en el famoso manuscrito llamado *Commentariolus*.

[57] Esta pintura de Giotto lleva por nombre *El sueño de Joaquín* ($\sim$1300), y está ubicada en la Capilla Scrovegni de Padua, Italia. Evidentemente esta no es la única pintura que con su carencia de profundidad sugieren un primer plano, ya que existe una infinidad de ejemplos de ello en las pinturas religiosas de estilo bizantino con el fondo dorado, todas con una marcada sensación de que "todo está encima".

En el transcurso del *quatroccento*, con la noción de perspectiva en su proceso de maduración, grupos cada vez más grandes de personas comenzaron a captar de manera más precisa la profundidad del espacio, como vemos en la siguiente pintura de Perugino[58] ($\sim$ 1482).

Es como si la apertura del "espacio dibujable sobre la Tierra", proporcionada por la perspectiva, hubiera sido un prerrequisito para la teoría copernicana, con su apertura de todo el cosmos.

Desde esta mirada podemos convencernos de que la teoría heliocéntrica no es solamente una teoría matemática que busca superar a la geocéntrica, sino que es una especie de "manifiesto cultural", un símbolo de los tiempos que expresa algo mucho más profundo: expresar que el viejo cosmos cerrado se estaba resquebrajando, para que nazca uno nuevo, sin límites. La teoría de la perspectiva, e inmediatamente después la teoría heliocéntrica, no hacen sino preparar el terreno para la eventual apertura e infinitud del espacio cósmico.

Desde este punto de vista ya podemos comprender que nosotros, post-copernicanos, tenemos completamente integrada la noción de cercanía y lejanía, mientras que las personas pre-copernicanas, sin una conciencia precisa y objetiva de la profundidad espacial en una teoría de la perspectiva, estaban más inclinados hacia un universo envolvente y ajustado, cosa que nosotros ya perdimos la capacidad de siquiera imaginar.

[58] Esta pintura de Pietro Perugino lleva por nombre *Entrega de las llaves a San Pedro* ($\sim$1482), y está ubicada en la Capilla Sixtina, Ciudad del Vaticano.

Por ello nos dice el poeta Owen Barfield:

"Antes de la revolución científica, el mundo se parecía más a una indumentaria con la que los hombres se cubrían, que a un escenario en el que se movían."[59]

Las pinturas anteriores expresan de manera exacta esta cita de Barfield.

Pero ya hemos visto que esto tiene un precio: ganar conocimiento sobre la profundidad del espacio es perder la intimidad con el universo, lo cual lamentablemente es bastante claro para nosotros, con nuestra incapacidad para sentir la naturaleza y el cosmos como algo relacionado con nuestra profundidad interior.

Ese es el precio que hemos pagado como modernos: la desconexión de nuestro interior con el mundo está en estrecha relación con nuestra capacidad de objetivar el espacio externo.[60]

Mientras más enorme percibimos el espacio (perspectiva), y más nos descentramos en esa inmensidad (Copérnico), más aislado se siente el ser humano. No por nada decía Blaise Pascal, destacadísimo matemático y filósofo allá por el año 1650, en una mezcla entre un universo cerrado y uno infinito:

"Veo esos espantosos espacios del universo que me encierran, y me encuentro atado a un rincón de esta vasta extensión"

Los antiguos, por su parte, vivieron en ese universo envolvente, ajustado y esférico, lleno de conexiones íntimas y de significado tanto exterior como interior. Ese es el universo de los astrónomos medievales, el cual es difícil de comprender, pero no podemos negar que lo hemos intentado.

---

[59] El acto de trascender las barreras cosmológicas y epistemológicas que condicionan nuestra relación actual del universo, para poder intentar comprender la conciencia del ser humano pre-copernicano, no podía sino ser obra de un poeta. En todo caso, Owen Barfield no fue el único que ha tocado estos interesantes temas. La cita anterior es de su libro *Salvando las apariencias* (1957), que en suprimera edición castellana realizada por la editorial Atalanta (2015) encontramos en la página 139.

[60] Refiriéndose a la perspectiva nos dice el poeta Jean Gebser: "La objetivación del espacio y de su cualificación forma parte un yo consciente de sí mismo, capaz de confrontarse con ese espacio y, desprendiéndolo del alma, capaz también de representarlo." Ver *Origen y Presente* (2011 [1949]), editorial Atalanta, página 36. De hecho, es esa capacidad de "desprenderlo del alma" lo que permite ver ese espacio como un algo separado, cada vez más ajeno, al cual podemos acceder mediante re-presentaciones. Por otro lado, nos dice el filósofo Richard Tarnas: "Sin embargo, la luminosidad de esa gran revolución [la revolución copernicana] ha arrojado una sombra extraordinaria. El radical desplazamiento de la Tierra y la humanidad del centro cósmico absoluto, la asombrosa transferencia del orden cósmico de lo observado al observador, y el inexorable desencantamiento del universo material, fueron aspectos clave de la mente moderna. Hoy resumen el sentido subyacente de desorientación y alienación. Cuando el cielo dejó de ser un reino divino y la Tierra dejó de estar engastada en un orden celestial de esferas y poderes planetarios, la humanidad se vio al mismo tiempo liberada y expulsada del vientre cósmico antiguo-medieval. La naturaleza esencial de la realidad experimentó un inmenso giro para la mente occidental, que en ese momento se abría a un mundo de dimensiones, estructuras y explicaciones e implicaciones existenciales completamente nuevas.". Ver *Cosmos y Psique* (2017, [2006]), editorial Atalanta, página 59.

Para cerrar esta actividad, y en consecuencia el proyecto, leeremos un fragmento muy interesante del mismo libro de Owen Barfield, con el cual dejamos al lector/auditor reflexionar sobre cómo la esfera celeste es simplemente una expresión matematizada de un cosmos cercano e íntimo, en el cual las distintas partes del universo están interconectadas, incluyendo al ser humano en su interior:

"El cuadro de fondo [del mundo medieval] era entonces el del hombre como microcosmos dentro del macrocosmos. Es evidente que el ser humano no se sentía aislado por su piel del mundo exterior en el mismo grado que nosotros. [El hombre medieval] estaba integrado o entretejido en el mundo exterior; cada una de sus partes estaba unida mediante algún hilo invisible a una parte del mundo exterior. En esta relación con su entorno, el hombre de la Edad Media era, a diferencia de nosotros, más que una isla, un embrión."[61]

[61] Ver *Salvando las apariencias* (2015 [1957]), página 119.

Sugerencias para realizar la actividad

Esta actividad tiene 2 partes, cuya duración total debiera ser de 2 horas y 15 minutos, y cuyas descripciones y tiempos ideales son los siguientes:

1. Considerando que en esta actividad no habrá ni asistencia ni test de entrada o salida, entonces la primera parte será una breve charla realizada por el profesor encargado que tratará sobre todo lo descrito anteriormente del mundo cerrado y del universo infinito, apoyándose del PPT oficial.

Comenzamos la exposición con una comparación entre lo pre y lo post copernicano, para luego insistir que todo lo que hemos hecho en las 4 actividades previas ha sido pensado desde el punto de vista pre-copernicano. Destacar el hecho de que aunque nuestra concepción de lo real en el universo sea post-copernicana, es muy interesante hacer un esfuerzo de comprender cómo percibían el mundo los pensadores antiguos.

Luego procedemos a hacer el experimento mental: un intento de comprender qué sería un universo esférico, envolvente e íntimo.

Posteriormente hablaremos de cómo la separación entre el ser humano y el mundo se ve reflejada en su manera de objetivarlo mediante la perspectiva lineal y la teoría heliocéntrica, destacando el hecho de que son prácticamente simultáneas.

Finalizamos reflexionando, desde la visión del filósofo Richard Tarnas y los poetas Owen Barfield y Jean Gebser, que la idea de que un universo cerrado no proviene de una inocencia geométrica, sino de una relación de cercanía con el universo. Esta relación entre la psique humana y el cosmos medieval fue porosa, fluida, al contrario de nuestra actual relación con el mundo post-copernicano-cartesiano, que sostiene una tajante distinción entre la subjetividad humana y la objetividad del mundo.

Toda esta charla debiera durar idealmente no más de 45 minutos.

2. Luego de ello realizaremos la premiación del proyecto, que durará todo el resto de la actividad.

En este punto entregaremos un diploma de participación a todos los profesores y estudiantes, donde aprovecharemos de entregar a cada profesor una copia física de este manual. Esto incluye a los profesores que estuvieron con nosotros tanto en 2024 como en 2025.

Luego llamaremos a los participantes que más hayan participado, que más hayan aportado, que más entusiasmo hayan puesto en las actividades y en nuestras redes sociales, para regalarles de la manera más justa y equilibrada posible los instrumentos y/o materiales utilizados en el proyecto.

Nuestra intención es que en esta última actividad de *Geómetras* regalemos todo, para que los instrumentos y las cartas de historia sean como semillas esparcidas en el país, que motiven a profesores y estudiantes a estudiar las matemáticas y las ciencias de una manera crítica y madura.

Parte II:
Materiales utilizados

Cómo conseguir un astrolabio planisférico (actividad 1)

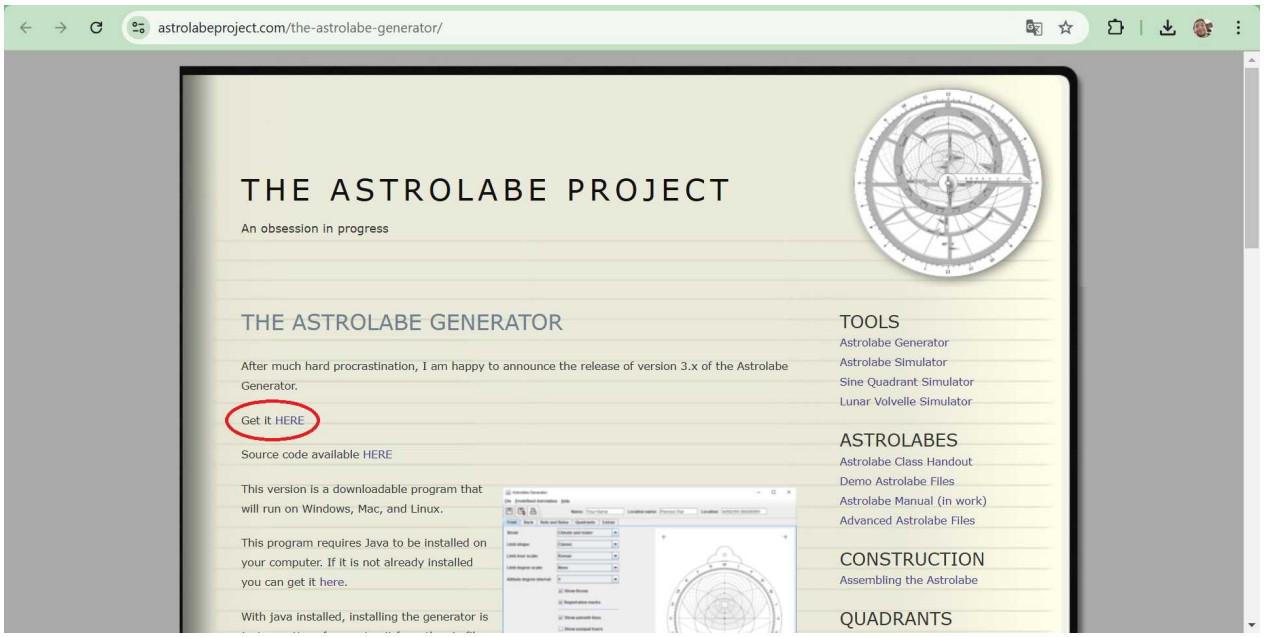
Para conseguir nuestro astrolabio, descargaremos el programa AstrolabeGenerator-3.3[62] que nos entregará todas las imágenes que utilizaremos para construir el instrumento.

En primer lugar, desde un computador ingrese a la siguiente página web:

https://www.astrolabeproject.com/the-astrolabe-generator/

Ahí debe hacer click en Get it HERE, de tal manera que se descargará un archivo comprimido .zip llamado

AstrolabeGenerator-3.3[63]



Al ser un archivo comprimido, debe descomprimirlo en su computador, obteniendo así el archivo .jar AstrolabeGenerator-3.3[64]

Cuando abra la aplicación descubrirá que hay 6 pestañas arriba a la izquierda:

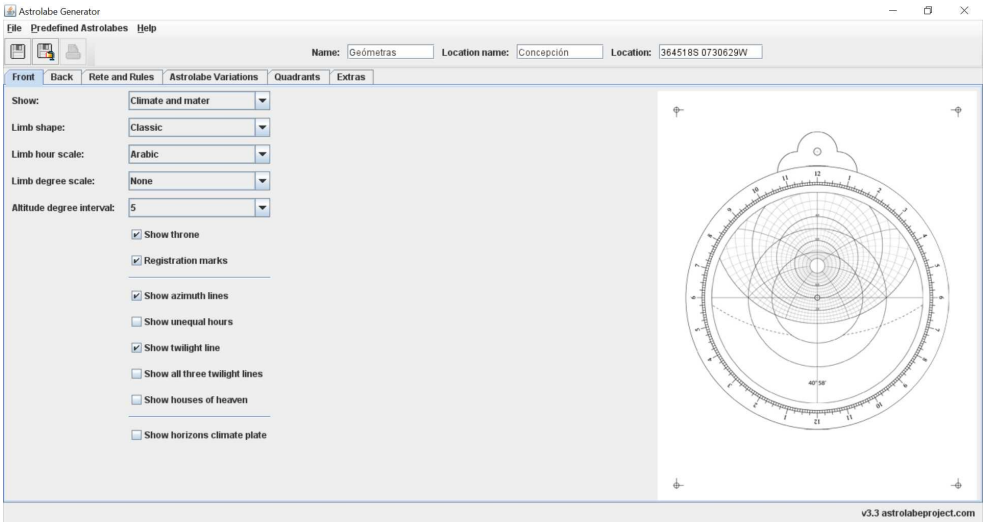
Front, Back, Rete and Rules,
Astrolabe Variations, Quadrants, Extras.

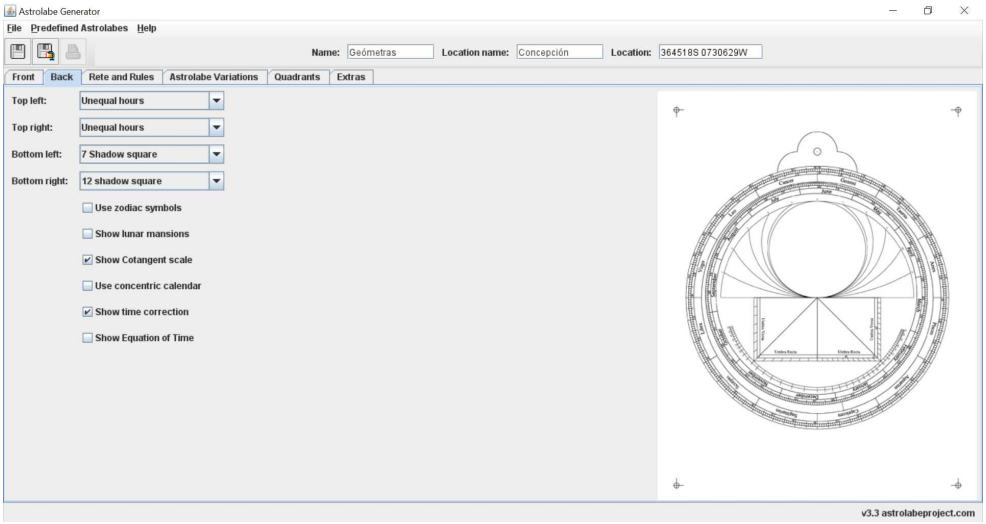
A nosotros solamente nos interesan las 3 primeras, las cuales le sugiero dejar exactamente igual a lo indicado en las tres imágenes a continuación.

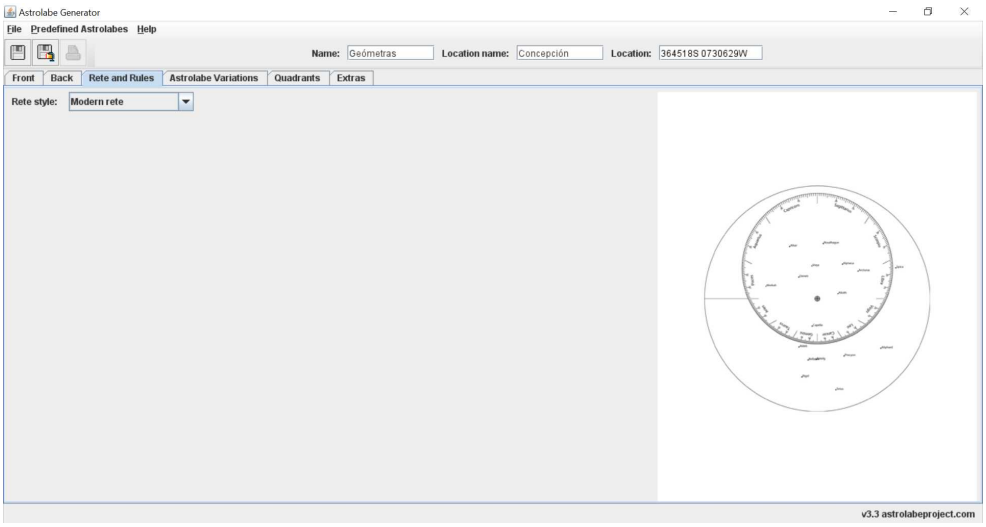
[62] Este programa está liberado bajo la licencia GPL-3.0, por Richard Wymarc.

[63] En caso de que el archivo no se descargue, haga click derecho sobre la palabra HERE y ponga "Guardar enlace como...", para guardarlo en su computador.

[64] Como bien indica el autor de la página, para abrir esta aplicación .jar usted debe tener instalado Java, el cual puede descargar siguiendo las instrucciones de esa misma página.


Astrolabe Generator
File Predefined Astrolabes Help
Name: Geómetras Location name: Concepción Location: 364518S 0730629W
Front Back Rete and Rules Astrolabe Variations Quadrants Extras
Show: Climate and mater
Limb shape: Classic
Limb hour scale: Arabic
Limb degree scale: None
Altitude degree interval: 5
Show throne
Registration marks
Show azimuth lines
Show unequal hours
Show twilight line
Show all three twilight lines
Show houses of heaven
Show horizons climate plate
v3.3 astrolabeproject.com


Astrolabe Generator
File Predefined Astrolabes Help
Name: Geómetras Location name: Concepción Location: 364518S 0730629W
Front Back Rete and Rules Astrolabe Variations Quadrants Extras
Top left: Unequal hours
Top right: Unequal hours
Bottom left: 7 Shadow square
Bottom right: 12 shadow square
Use zodiac symbols
Show lunar mansions
Show Cotangent scale
Use concentric calendar
Show time correction
Show Equation of Time
v3.3 astrolabeproject.com


Astrolabe Generator
File Predefined Astrolabes Help
Name: Geómetras Location name: Concepción Location: 364518S 0730629W
Front Back Rete and Rules Astrolabe Variations Quadrants Extras
Rete style: Modern rete
v3.3 astrolabeproject.com

Luego de tener lista la configuración general de esas 3 pestañas, debemos completar los datos que aparecen en la parte superior de la aplicación:

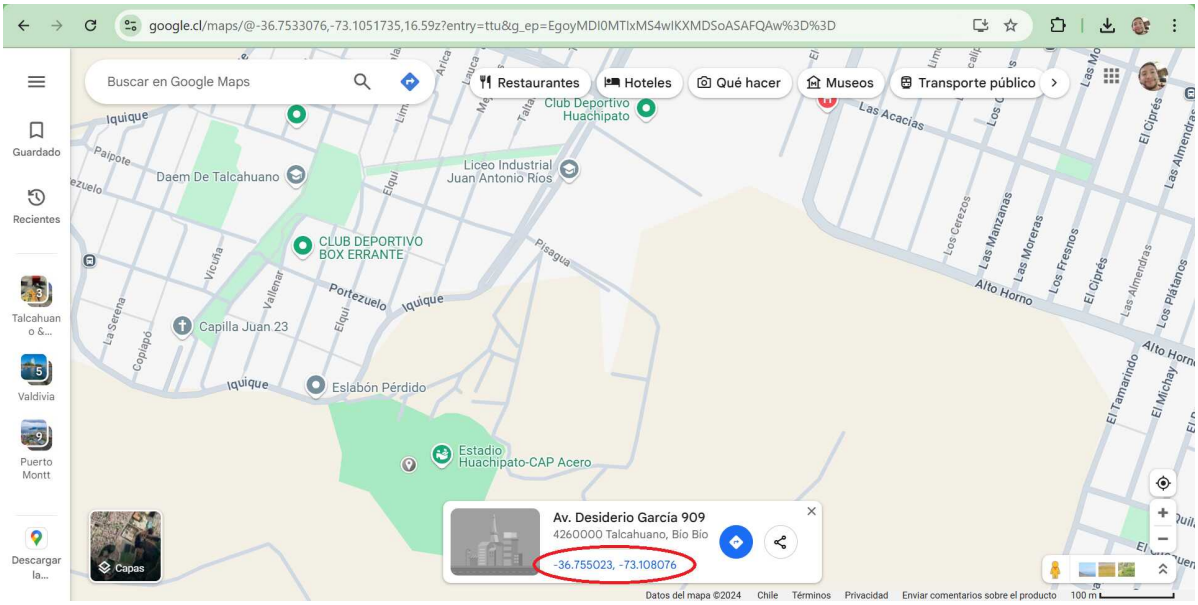
NAME, LOCATION NAME, LOCATION.

En el contexto del proyecto, en NAME nosotros pusimos la ciudad de cada sede de la actividad (Concepción, por ejemplo), pero en el ejemplo que estamos viendo en esta sección pusimos GEÓMETRAS.

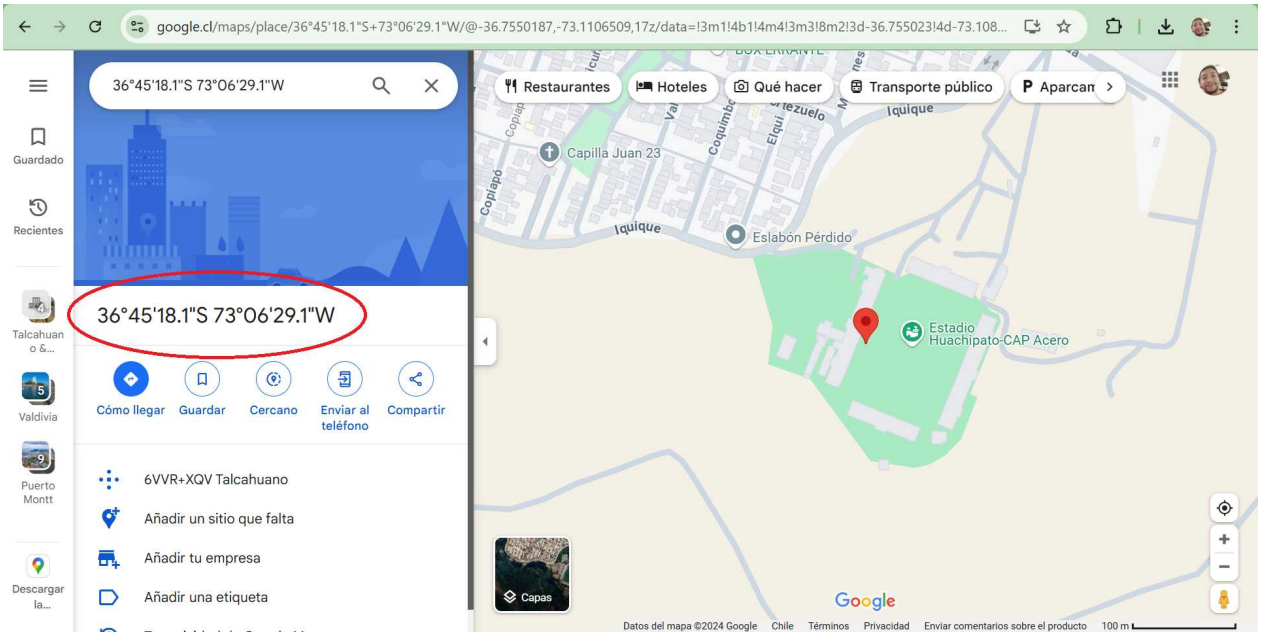
En LOCATION NAME ponga lo que usted quiera; en este ejemplo nosotros pusimos precisamente CONCEPCIÓN.

Finalmente, en LOCATION es donde requerimos mayor cuidado, ya que debemos ingresar las coordenadas geográficas. Fíjese atentamente en las imágenes arriba: dice 364518S y luego, separado por un espacio, 0730629W. Para obtener estos números usted debe tener claro el lugar preciso en que desea utilizar el astrolabio.

En este ejemplo utilizamos las coordenadas del Estadio Huachipato-CAP Acero, y para ello lo que hicimos fue abrir GOOGLE MAPS y buscar este lugar haciéndole un click *muy cerca*[65], dejando una "marca de ubicación" en blanco y negro. Al hacer esto aparece una ventanita que indica en números azules las coordenadas geográficas del lugar (aparecen en decimales: $-36.755023, -73.108076$; ver primera imagen abajo), pero si uno le hace un click a dichos valores en azul entonces aparecerán las coordenadas no en decimales, sino en minutos y segundos ($36°45'18.1''$S $73°06'29.1''$W; ver segunda imagen abajo).



[65] Debe ser cerca, pero no encima del sitio, porque al hacer click en el sitio exacto sale mucha información irrelevante y MAPS no nos entregará las coordenadas de manera directa en el formato que necesitamos.



Es de esta última imagen de donde tomamos las coordenadas que ingresamos en la aplicación del astrolabio, como indicamos a continuación:

La latitud, que el Maps entrega como $36°45'18.1''$S, la escribimos en la aplicación como 364518S, donde omitimos la parte decimal de 18.1 porque son 2 cifras por los grados, los minutos y los segundos[66].

La longitud, que el Maps entrega como $73°06'29.1''$W, la escribimos en la aplicación como 0730629W, donde omitimos la parte decimal de 29.1 porque son 2 cifras por los minutos y los segundos, mientras que en los grados ponemos 073 y no 73 porque en este caso el formato es de 3 cifras[67].

Ya con todo esto hecho, hacemos click en el botón de Save to Folder arriba a la izquierda, para que la aplicación nos entregue las 4 imágenes en formato .eps que definirán nuestro futuro astrolabio: su reverso AstrolabeBack, su tímpano AstrolabeFront, su araña AstrolabeRete y la alidada con la regla AstrolabeRules.

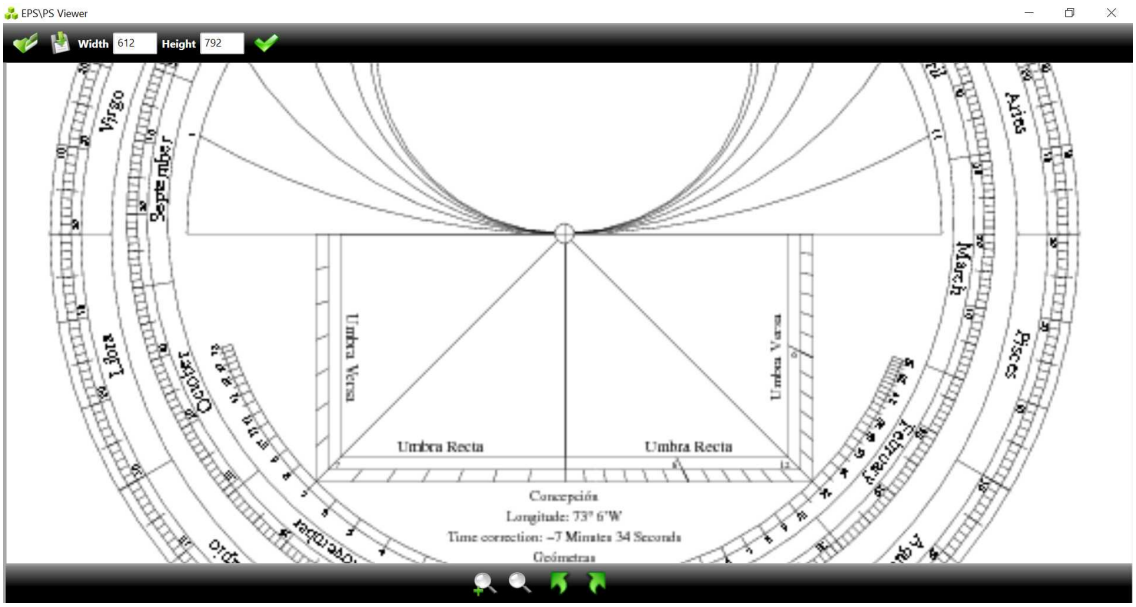
Para visualizar estos archivos se requiere una aplicación que abra el formato .eps, para lo cual sugiero ingresar a la siguiente página web:

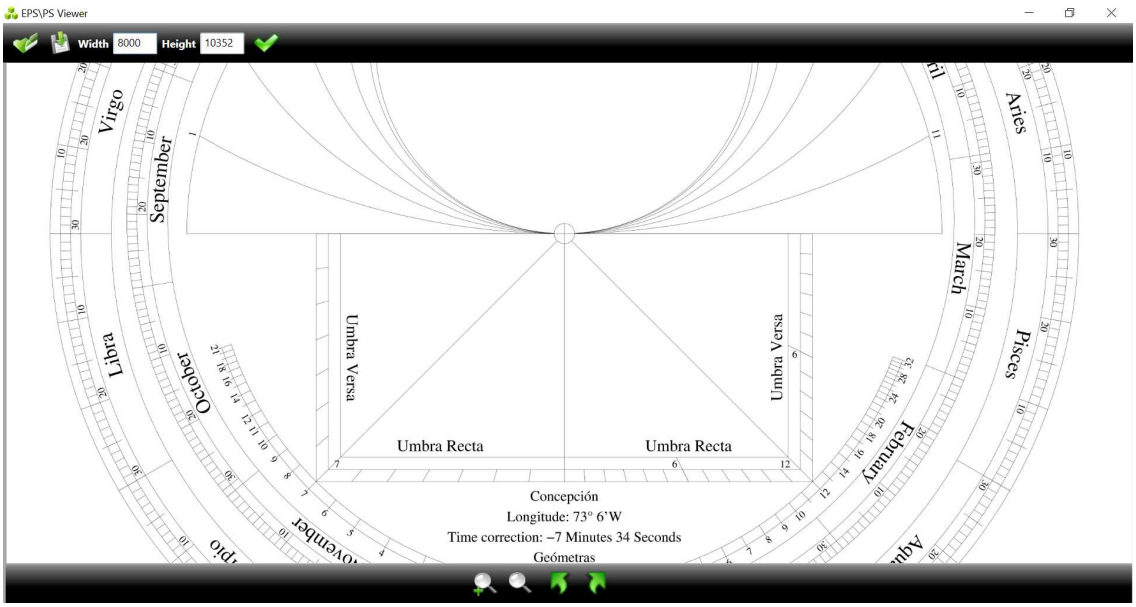
https://epsviewer.org/download.aspx

Después de sobrevivir a la publicidad, podrá descargar la aplicación EPS Viewer, con la cual podrá abrir los 4 archivos de nuestro astrolabio.

[66] Por ejemplo, la latitud $8°3'5''$N la escribimos como 080305N.
[67] Por ejemplo, la longitud $5°6'8''$E la escribimos como 0050608E.

Por ejemplo, si usted abre el archivo AstrolabeBack y le hace zoom, verá que se ve muy pixelado (ver primera imagen abajo), pero eso se arregla si le cambia los números arriba a la izquierda donde dice Width y Height, reemplazando el número 612 del Width por el número 8000, y luego haciendo click sobre el ✓ de color verde al lado derecho del número 10352 (ver segunda imagen abajo). De hecho, mientras más grande sea el número, menos se pixelará la imagen con los sucesivos zoom que le hagamos.

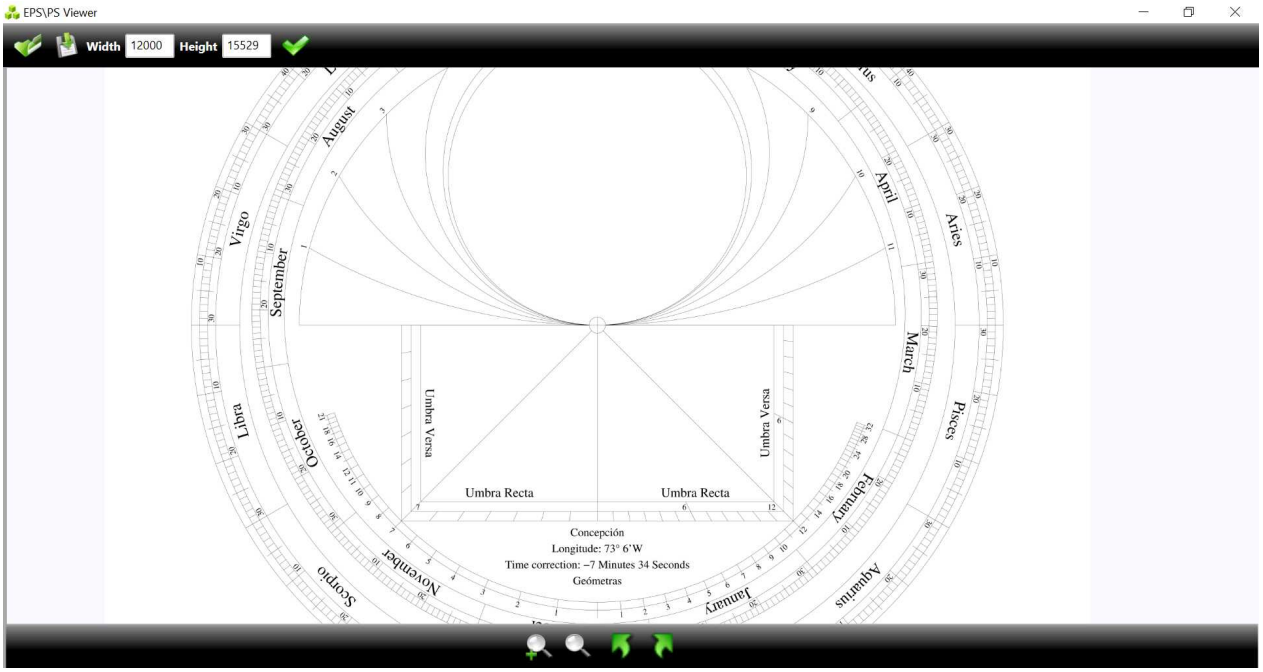




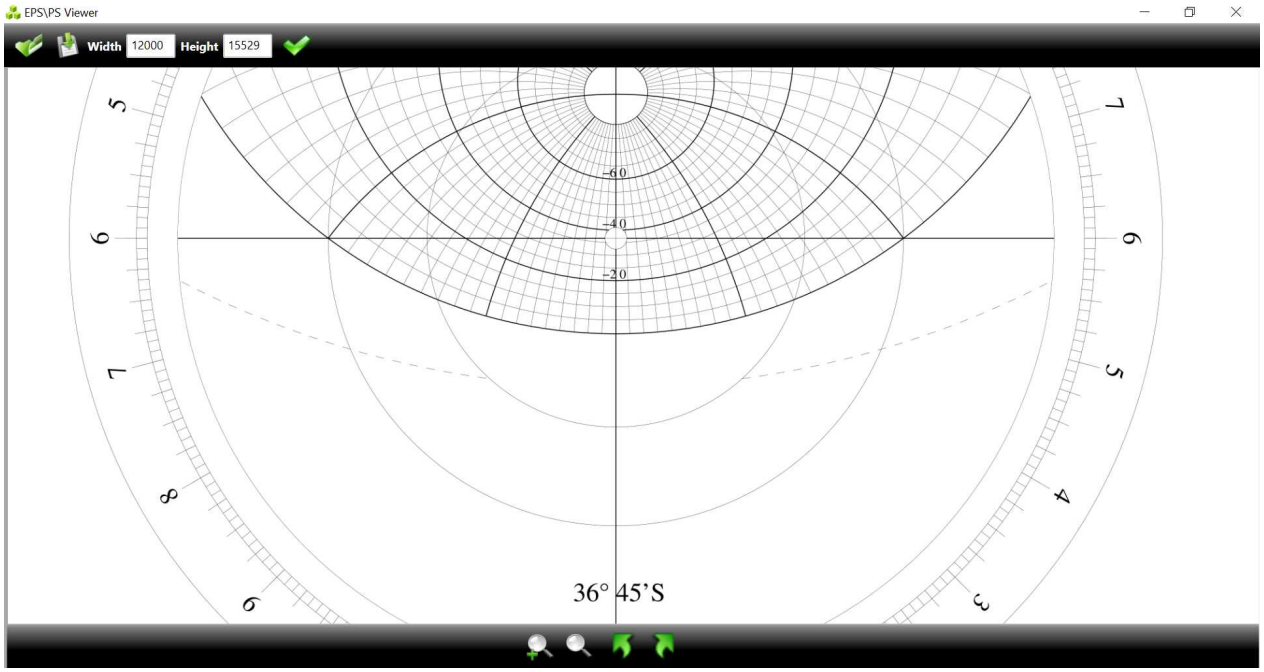
El formato .eps es maravilloso, porque permite escalar las imágenes sin perder nada de calidad: sus imágenes están *vectorizadas*. Por ello es tan utilizado para impresiones en alta calidad -que es precisamente nuestro caso- ya que un buen uso del astrolabio requiere de la mayor precisión de las curvas y líneas que lo definen.

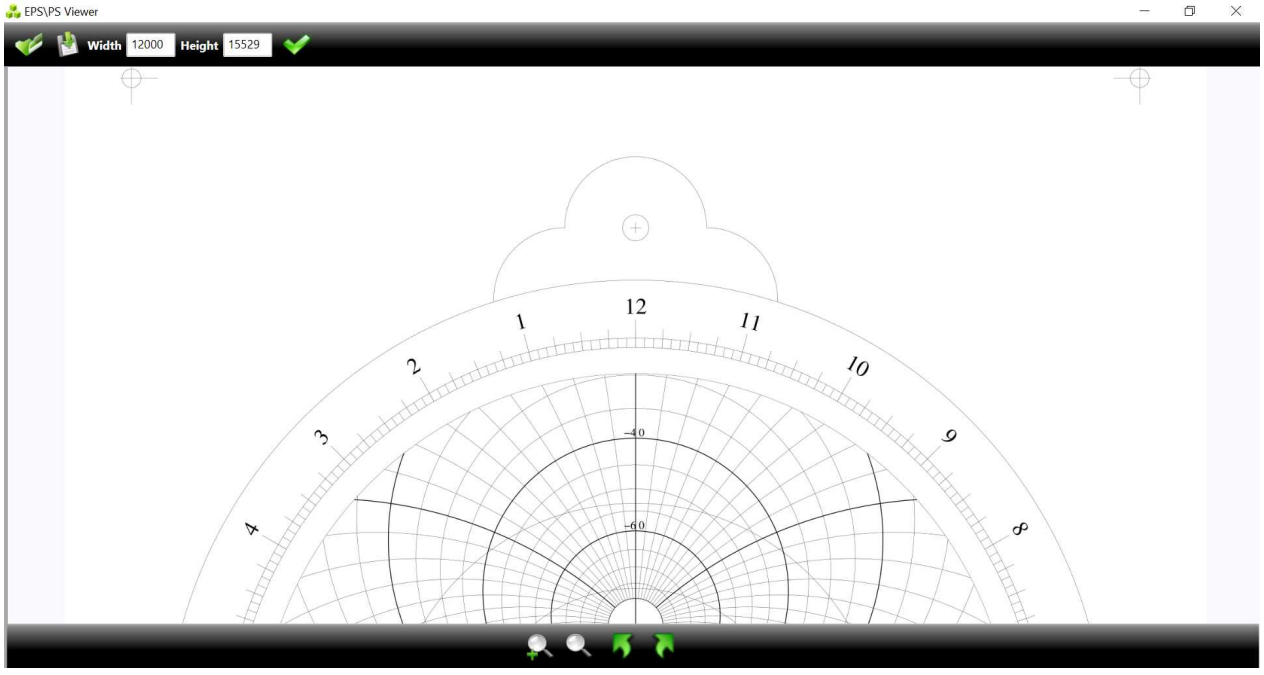
Las siguientes cuatro pares de imágenes son algunas visualizaciones de los cuatro archivos que estamos usando de ejemplo, considerando WIDTH=12000.

ASTROLABEBACK.

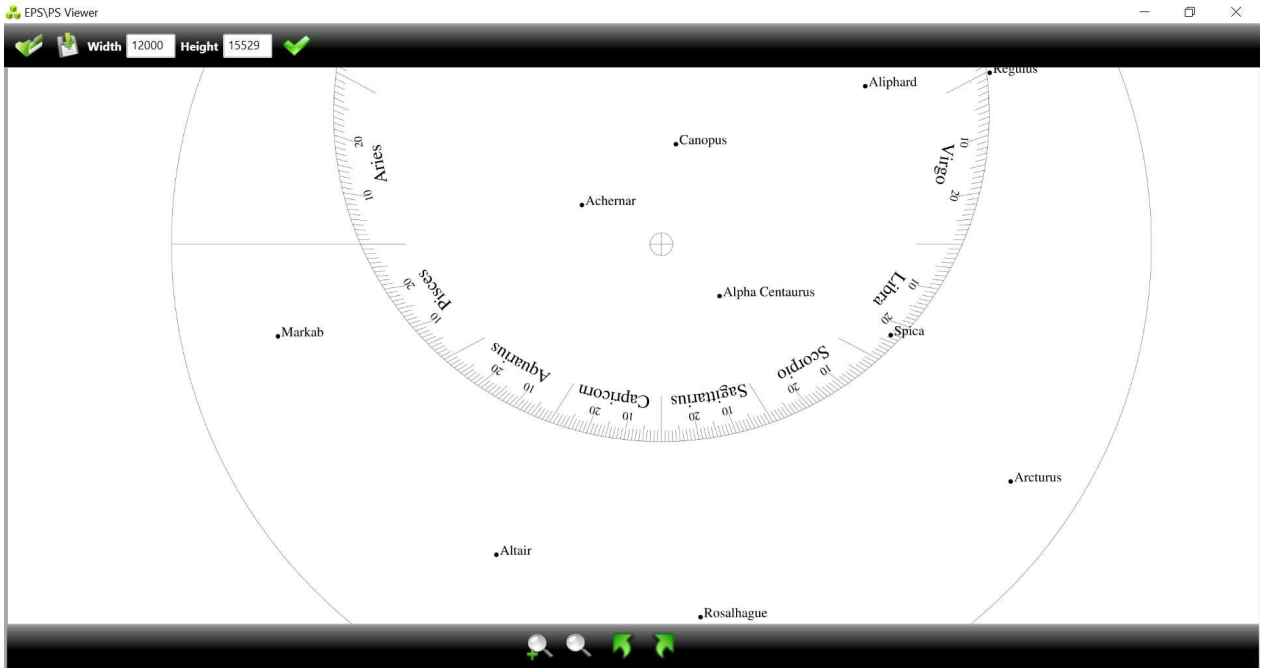


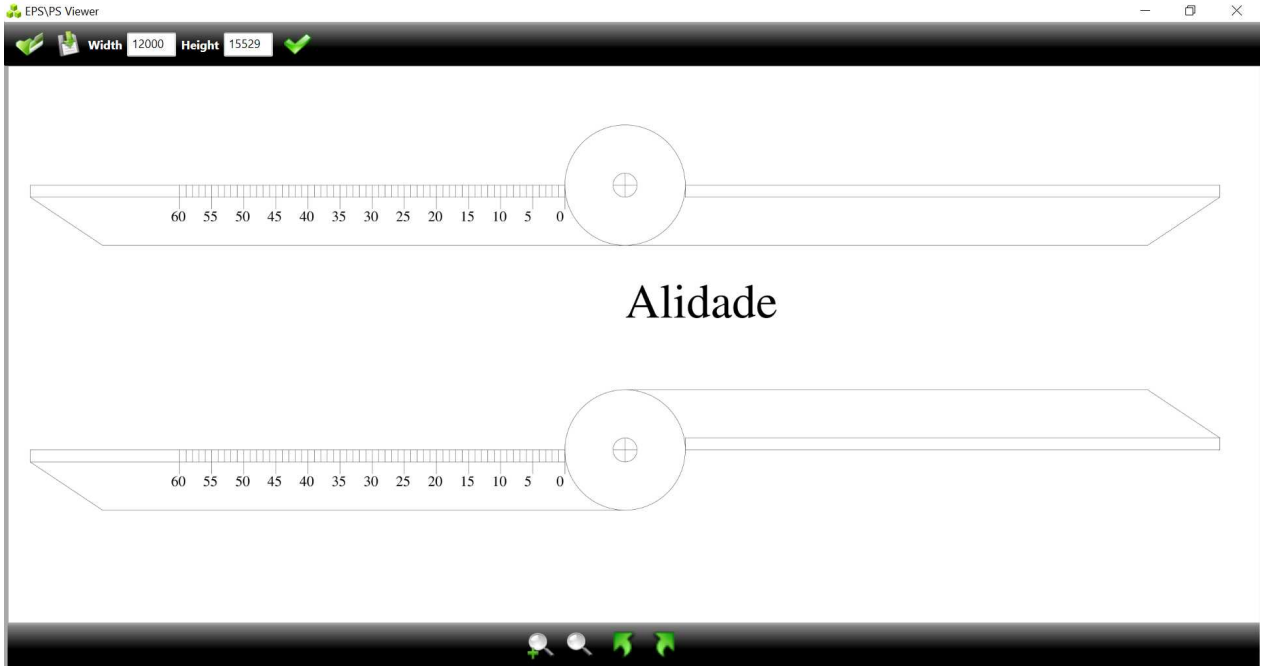
AstrolabeFront.

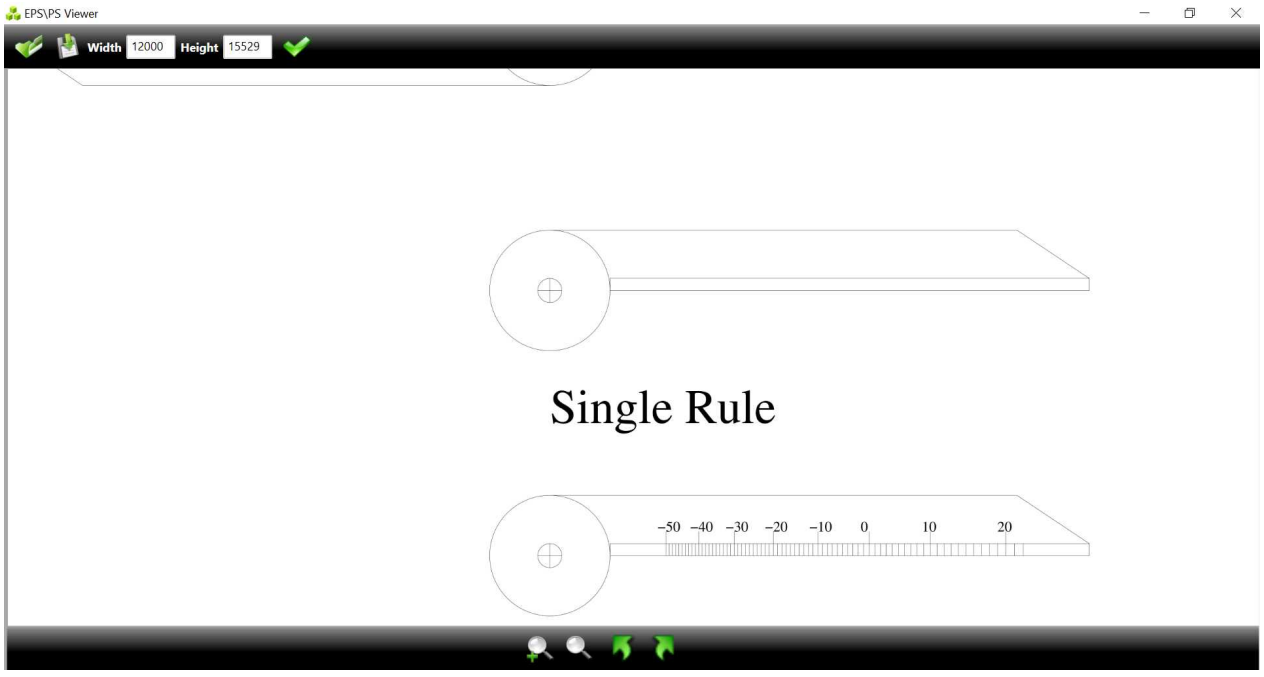




AstrolabeRete.

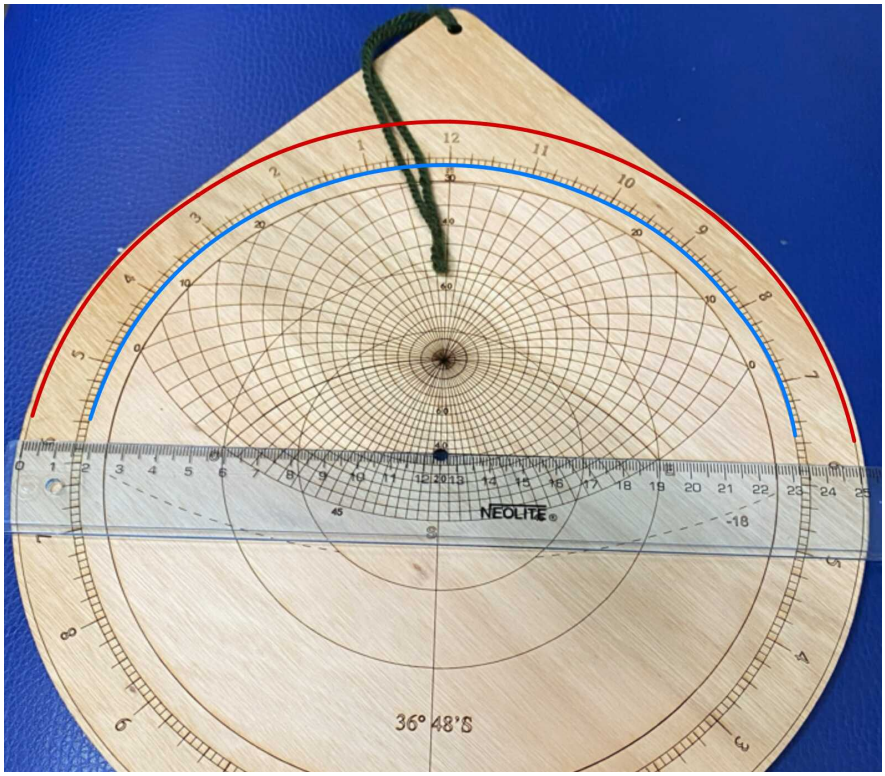


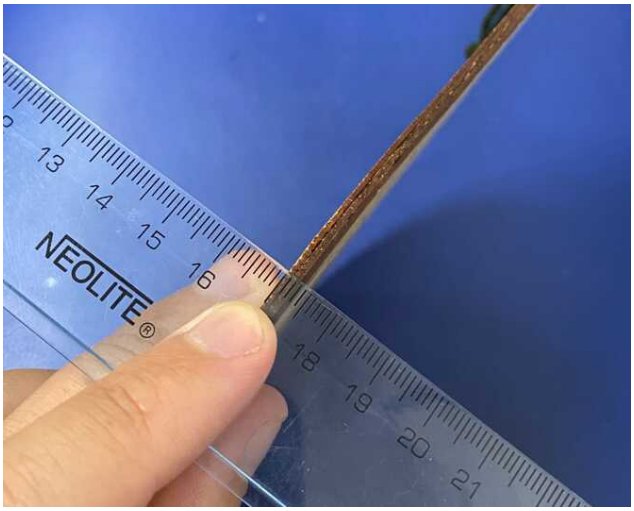

EPS\PS Viewer
Width 12000 Height 15529
60 55 50 45 40 35 30 25 20 15 10 5 0
Alidade
60 55 50 45 40 35 30 25 20 15 10 5 0


EPS\PS Viewer
Width 12000 Height 15529
Single Rule
−50 −40 −30 −20 −10 0 10 20

Ya habiendo verificado con el EPS Viewer que los 4 archivos estén correctos, procedemos a pedirle a un "grabador en laser de confianza" que materialice estos archivos, para así construir nuestro tan ansiado astrolabio. Para ello es conveniente aclarar los datos técnicos que nosotros mismos utilizamos para los astrolabios del proyecto.

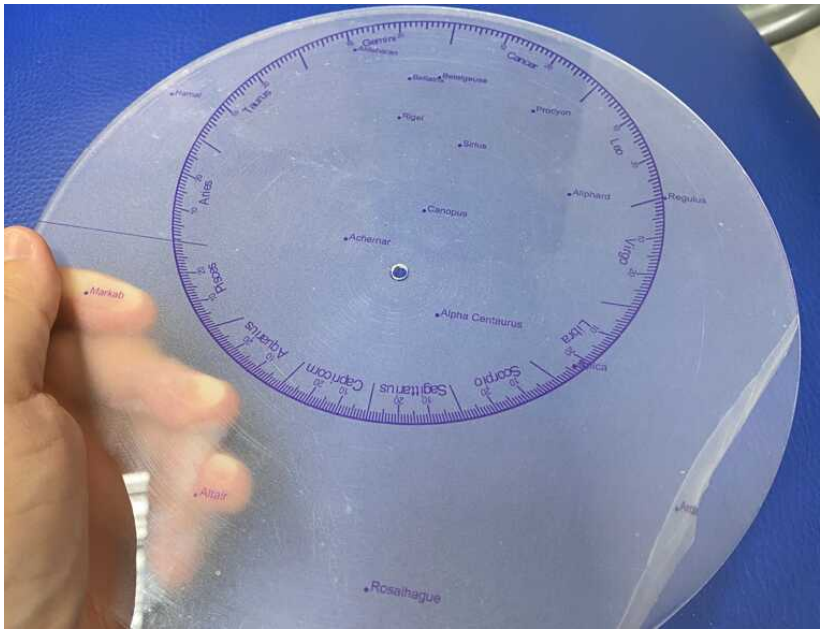
1. El tímpano del astrolabio fue grabado sobre un terciado de 3 milímetros de espesor, de tal manera que los diámetros de los círculos marcados de rojo y azul en la imagen abajo fueron de 25 y de 21,4 centímetros, respectivamente.

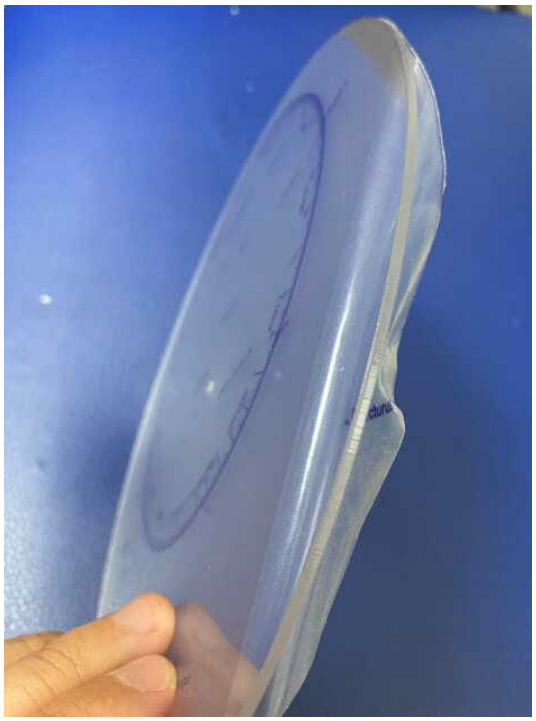




2. Sobre ese mismo terciado, pero en su cara trasera, grabamos el reverso del astrolabio.

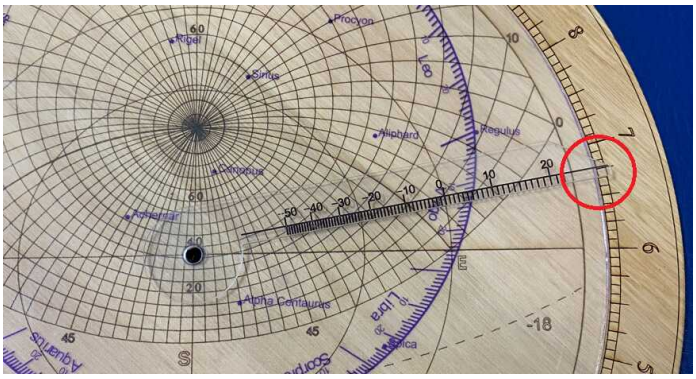
3. La araña del astrolabio fue impresa sobre un "papel adhesivo transparente", el cual fue recortado por el círculo más externo que define la imagen .eps de la araña, siendo este último del mismo tamaño que el círculo del tímpano que marcamos en azul. Luego este papel adhesivo debe ser pegado por la parte impresa[68] a un círculo de acrílico con el mismo diámetro y 1.5 milímetros de espesor.



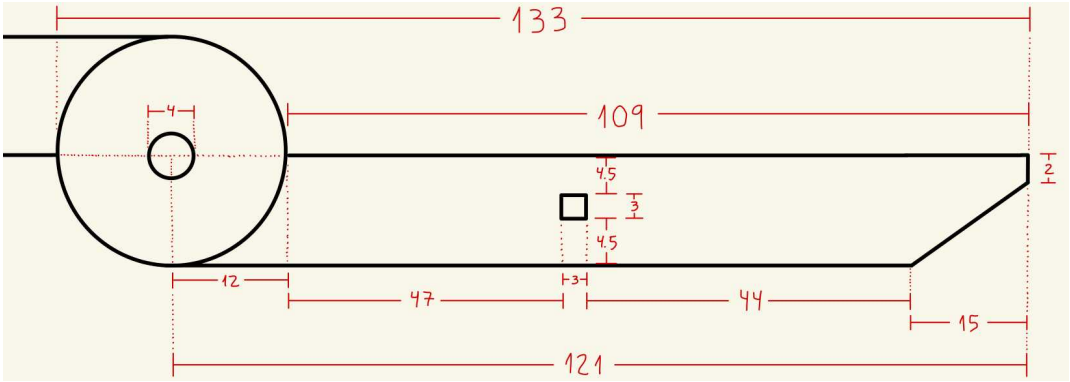


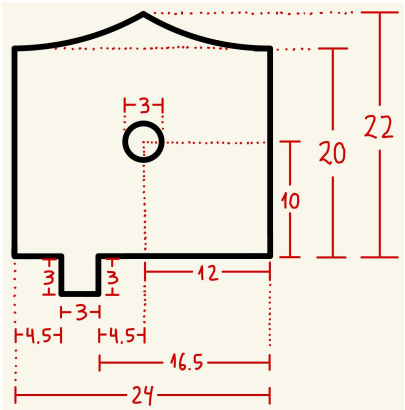
[68] Así evitamos que el roce de la regla con la araña deteriore su parte impresa (desgaste similar al de la araña de la imagen anterior, cerca de *Altair*), pues esta última solamente tendrá contacto directo con el terciado del tímpano.

4. La regla debe llegar con su punta al mismo círculo que marcamos en azul anteriormente, y nosotros la probamos en dos formatos distintos: primero en acrílico (siguiendo la misma lógica de pegado de la araña) y luego en terciado (con el mismo espesor). Finalmente consideramos que lo más apropiado es la regla en formato acrílico, esencialmente porque nos permite ver a través de ella, aunque siempre hay que tener en cuenta la pequeña distorsión visual que genera la refracción de la luz a través de este material.



5. Las pínulas y alidadas que usamos en el proyecto también fueron grabadas sobre terciados de 3 milímetros, y tienen las siguientes medidas (en milímetros)[69].





[69] En caso de que las pínulas no queden bien agarradas en los hoyitos de la alidada, empape la puntita de las primeras en stick-fix, y luego insértelas en los hoyitos de la alidada. Es una medida desesperada, pero funciona, y no sería raro que hubieran desajustes milimétricos/submilimétricos en las medidas porque los grabados en laser igual tienen un margen de error.

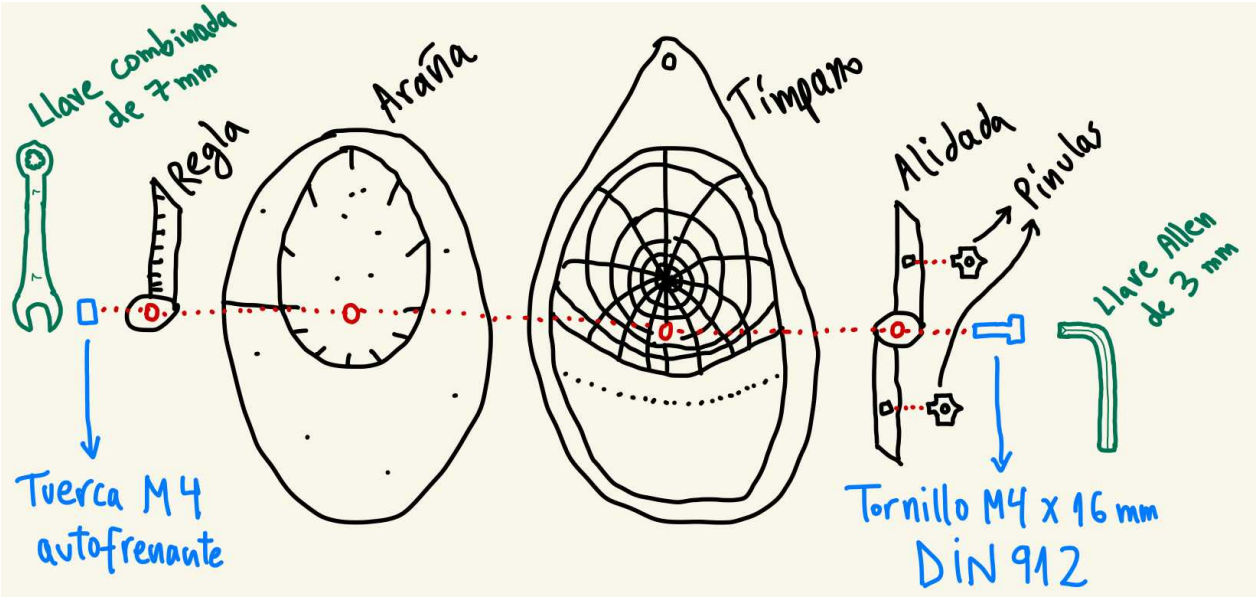
6. Para acoplar las piezas del astrolabio lo que hicimos fue atravesar la regla, la araña, el frente y la alidada por su centro con un hoyito de 4 milímetros de diámetro, para así poder mantenerlas unidas con la ayuda de un tornillo y una tuerca autofrenante (esta última para que no se desarme con los giros). Ambas piezas mantienen fijas las partes del astrolabio y se aprietan usando simultáneamente una llave allen y una llave boca-corona. Las especificaciones técnicas de estos repuestos son las siguientes:

⋆ Tornillo M4 x 16 mm DIN 912.

⋆ Tuerca M4 autofrenante.

⋆ Llave Allen de 3 mm.

⋆ Llave combinada de 7 mm (también llamada boca-corona).



7. Para una mayor agilidad en los cálculos, decidimos realizar las siguientes modificaciones en el frente del astrolabio:

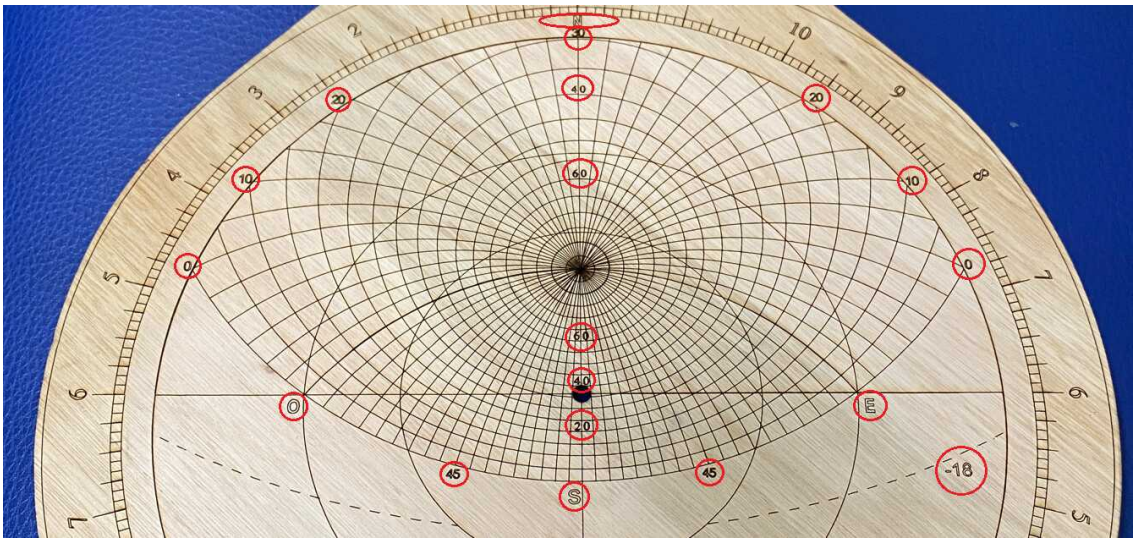
(a) *Agregamos los azimut de* 45 *grados desde el Sur hacia el Este y el Oeste.*
Como la distancia entre los pelitos de azimut entre 90 y 270 es demasiado pequeña, y es fácil equivocarse si uno cuenta a mano, entonces las marcas de 45 en los azimut de 180-45=135° y de 180+45=225° nos ayudan disminuir la posibilidad de una mala lectura.

(b) *Quitamos los signos menos de las alturas que nos entrega la aplicación.*
Es que nada que ver los signos menos ahí. Nosotros pensamos que el software las ve como negativas porque siempre piensa el observador con el polo norte celeste encima de su horizonte, y por ello el hemisferio sur quedaría debajo de su horizonte, lo cual explicaría lo negativo de sus alturas.

(c) *Agregamos nuevas alturas en el círculo interno del frente del astrolabio.*
Esto solamente a modo de agilizar los cálculos, aunque quizás debimos haber agregado también la altura de 50°.

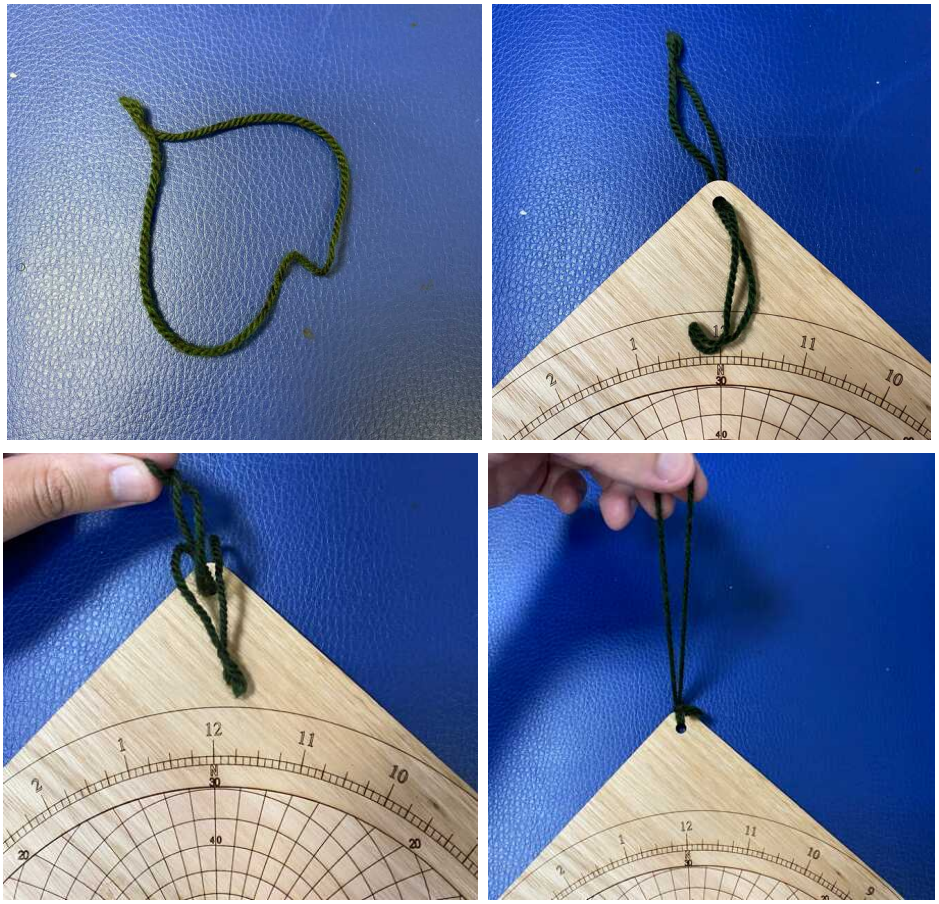
(d) *Agregamos el número* -18 *a la altura de la línea crepuscular (punteada).*
Esto solamente para dejar claro cuál tipo de crepúsculo estamos usando (astronómico).

(e) *Modificamos y completamos los signos cardinales.*
Aunque el Norte no esté estrictamente en el punto que hemos marcado del astrolabio, sí esta en dicha dirección (los demás puntos cardinales sí están marcados correctamente sobre el círculo del horizonte).



Igual aclaramos que a pesar de que buscamos agilizar los cálculos, tenemos muy en cuenta que estos cambios sobrecargan un poco de símbolos el instrumento.

8. La última "pieza" del astrolabio es la cuerda con la cual lo colgaremos vertical desde su *trono* (el cual hicimos liso por simplicidad y no como en el archivo .eps), y para ello creemos que las imágenes siguientes son más claras que cualquier explicación escrita. Lo único digno de aclarar aquí es que nosotros usamos un hilo de lana de 30 centímetros de largo, el cual cerramos como un círculo con un nudito para hacerle el procedimiento aquí mostrado.



9. Finalmente, para conservar su astrolabio en las mejores condiciones, le sugerimos guardarlo siempre en *vertical*, evitando siempre que sea posible dejarlo horizontal o inclinado. Lamentablemente el terciado se curva muy fácilmente, por ello la verticalidad es lo óptimo. Consideramos que dejarlo colgado libremente con su lana es la mejor manera de mantenerlo en buen estado, siempre evitando el contacto directo con el Sol o con la humedad.

Cómo conseguir una esfera armilar (actividad 2)

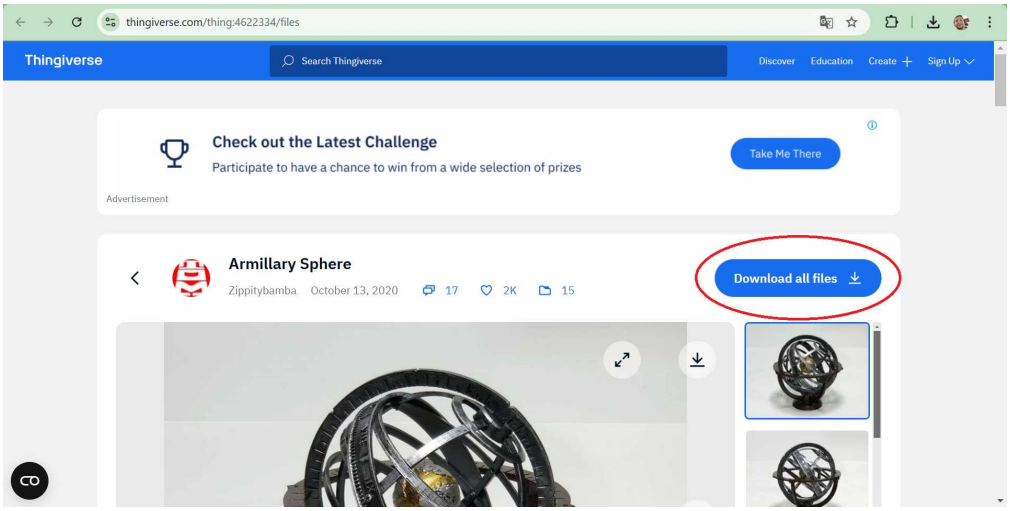
Para conseguir nuestra esfera armilar, descargaremos el modelo 3D[70] que nos entregará todas las piezas que utilizaremos para construir el instrumento.

En primer lugar, desde un computador ingrese a la siguiente página web:

https://www.thingiverse.com/thing:4622334/files

Ahí debe hacer click en el botón azul que dice Download all files, con lo cual descargará un archivo comprimido .zip llamado

Armillary Sphere - 4622334



Si usted descomprime ese archivo en su computador verá 2 carpetas y 2 archivos de texto. La carpeta Files es la que nos importa, ya que contiene los archivos de todas las piezas de la esfera armilar, en el formato .stl que necesitamos.

De los 17 archivos que contiene dicha carpeta, en el proyecto solamente ocupamos los siguientes nueve[71], indicando en paréntesis cuántas de cada pieza imprimimos:

Base (x1), CageAxis (x2), Colure (x4), Ecliptic (x1), Equator (x1)
HorizonDetailed (x1), HorizonLeg (x4), Meridian (x1), TropicCircle (x2)

[70] Este modelo 3D está liberado bajo la licencia CC BY-NC 4.0, por Zippitybamba.

[71] En primer lugar, descartamos todos los archivos sin hoyos ("no holes") porque los hoyitos nos permiten ensamblar las piezas de manera más precisa. También descartamos los ArcticCircle porque para que estos encajen bien con los colures deben ser impresos con mucha calidad (dado que presentan un ángulo inclinado en su impresión, y se deforma fácilmente), y aparte consumen tiempo que en el proyecto preferimos ocupar para imprimir las otras piezas. Finalmente, descartamos el EarthMap porque el archivo requiere bastante tiempo de impresión, y aunque poner a la Tierra al centro de nuestro instrumento sería un excelente modo de insistir en que el instrumento está basado en el universo geocéntrico, nos decantamos por no consumir tiempo en ellas. Podríamos decir, en resumen, que descartamos archivos por un asunto de tiempo, pero si usted lo tiene entonces hágalo todo :-)

Luego de haber probado muchísimas configuraciones distintas, con varias impresoras y filamentos, le aconsejamos realizar las impresiones en una impresora Creality K1 y filamento Hyper PLA de alta velocidad, acorde a los siguientes parámetros:

Tamaño de la placa de impresión: 220 x 220 x 250 mm

Soportes: Árbol Delgado (Slim Tree) con pendiente máxima (Threshold angle) de 30°.

Tamaño de la boquilla (Noozle size): 0.4 mm

Altura de la capa (Layer height): 0.2 mm

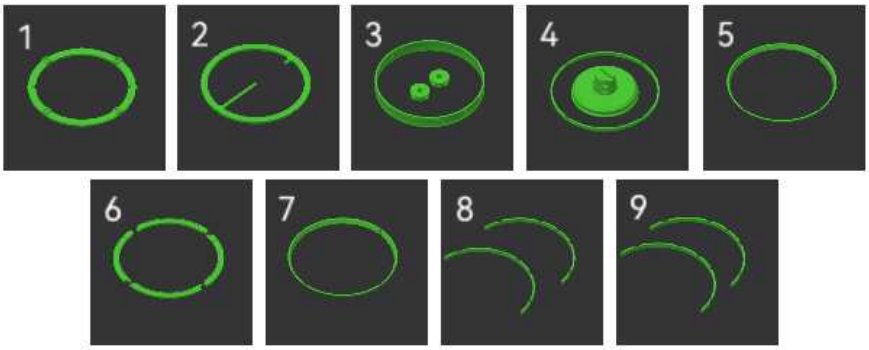
Capas externas (Outer walls): 2 capas

Relleno (Infill): 15 %

Es importante destacar que, por el tamaño de la placa de impresión, **todas las piezas fueron impresas al 90 % del tamaño original**, ya que es el máximo porcentaje bajo el cual pudimos imprimir sin problemas la pieza HorizonDetailed, que es la más grande del conjunto.

Considerando que esta impresora 3D admite una velocidad máxima de 600 mm/s, todas las piezas fueron configuradas para una velocidad inicial de 60 mm/s y una velocidad de desarrollo de 200-300 mm/s.

La siguiente imagen nos indica un conjunto de 9 configuraciones de impresión que agrupan todas las 17 piezas para imprimirlas de una manera óptima[72]. La tabla más abajo nos indica los tiempos aproximados y el material gastado para cada configuración (considerando siempre un margen adicional de ∼15 minutos para las configuraciones que toman más de media hora).



[72] Puedo enviarle el archivo que contiene todas estas configuraciones listas para imprimir en una Creality K1, si me escribe a creyesm1992@gmail.com

Información sobre las piezas a imprimir			
Configuración	**Piezas a imprimir**	**Tiempo de impresión**	**Cantidad de material**
1	HorizonDetailed (x1)	52m 47s	28g
2	Meridian (x1)	46m 16s	21g
3	Ecliptic (x1) CageAxis(x2)	53m 12s	25g
4	Equator (x1) Base (x1)	1h 8m	42g
5 y 7	TropicCircle (x1) (imprimir 2 veces)	10m 29s	6g
6	HorizonLeg (x4)	44m 11s	23g
8 y 9	Colure (x2) (imprimir 2 veces)	15m 47s	6g
TOTAL	**17 piezas**	**5h 9m**	**163g**

Si consideramos que los filamentos son de 1 kg, y que cuando empieza y termina la impresión 3D el extrusor consume un poquito de plástico, entonces es posible imprimir de 4 a 5 esferas por filamento.

Una vez impresas todas las 18 piezas, vamos a proceder a montarlas de manera apropiada para formar una verdadera esfera armilar[73]. Haremos esto en dos partes:

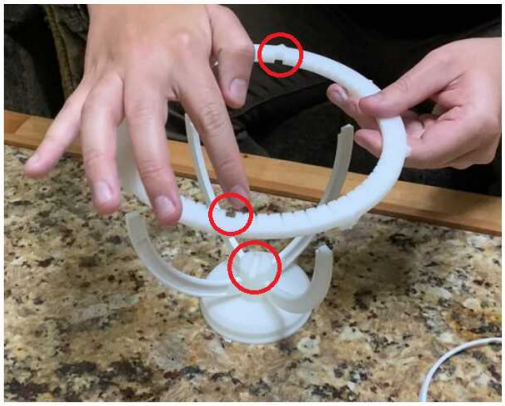
(1) El ensamblado de las piezas.

(2) El pegado de las piezas.

Comencemos:

(1) Ensamblaje. Para ensamblar las piezas empezamos armando la montura del horizonte. Primero anexamos las 4 patitas a la base, y luego ponemos sobre dichas patitas el horizonte, el cual debe quedar alineado tal cual indican las 4 imágenes abajo. Finalmente damos vuelta la montura en su conjunto con mucho cuidado, y dejamos todo lo que hemos armado a un lado (momentáneamente), para así pasar a armar la esfera rotatoria.

[73] Todo lo que viene a continuación, tanto el ensamblado como el pegado, lo expliqué detalladamente en unos videos que puedo compartirle sin ningún problema de manera personal, si me escribe a `creyesm1992@gmail.com`

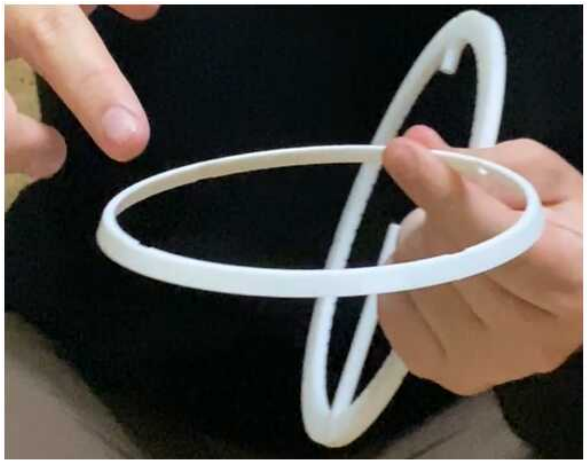


Para armar la esfera rotatoria debemos comenzar notando que hay dos piezas que tienen un “arriba” y un “abajo”: los CaxeAxis y los TropicCircle. En ambas píezas el “arriba” es la parte más pequeña, mientras que el “abajo” es la parte más grande.

Comenzamos entonces tomando uno de los CageAxis y le insertamos los 4 Colure de tal manera que todos apunten hacia la parte de “abajo” del CageAxis, tal cual en la imagen abajo (notar que solamente usamos 1 CageAxis, el otro lo ponemos más adelante).

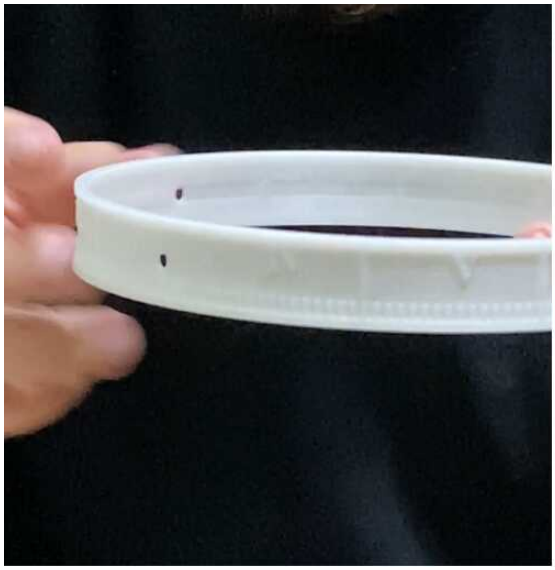
Ahora dejamos momentáneamente de lado esta primera estructura de la esfera rotatoria, y tomamos la pieza Meridian. Es en su palito de mayor longitud en el cual iremos agregando progresivamente 1 TropicCircle, 1 Equator y 1 Ecliptic, teniendo en cuenta lo siguiente:

El TropicCircle igual tiene un "arriba" y un "abajo" (ver imagen abajo izquierda), y debemos insertarlo de tal manera que su parte de "arriba" debe quedar mirando hacia abajo, tal cual en la imagen abajo derecha.



El Equator no tiene mayor ciencia, lo ponemos y listo.

El Ecliptic sí tiene un detalle a la hora de instalarla, puesto que los números romanos inscritos en dicha pieza deben quedar verticales, tal cual en la imagen abajo a la izquierda.



Con esto hemos terminado la segunda estructura de la esfera rotatoria.

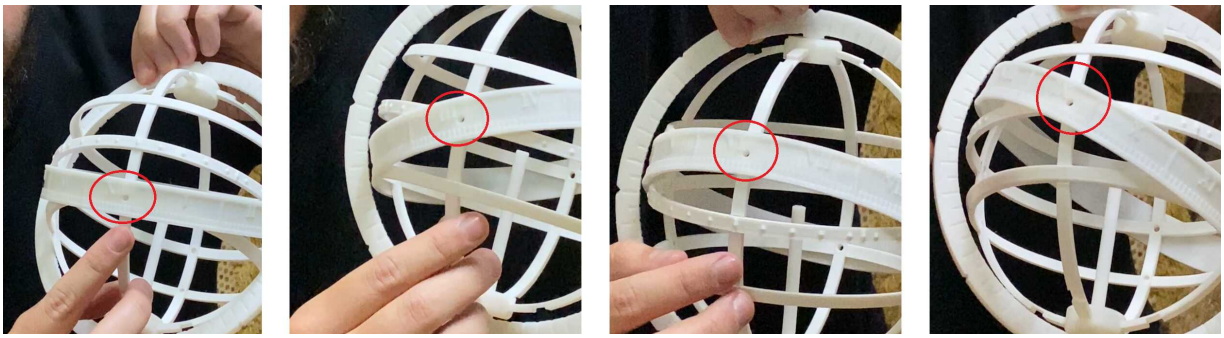
Ahora procedemos a tomar la primera estructura (de los Colure y CageAxis) y la insertamos completa en el palito largo del Meridian de nuestra segunda estructura, siguiendo el procedimiento de las dos imágenes abajo.

Es importante aclarar que es conveniente hacerlo así y no armar la primera estructura dentro de la segunda ya armada, porque los 3 círculos de esta segunda estructura deben quedar "por fuera" de los Colure. Con esto acomodamos un poco dichos círculos con los Colure, pero solamente un poco porque los Colure deben quedar lo suficientemente "sueltos" para poder recibir el TropicCircle que nos queda, el cual debemos insertar siempre por fuera de los Colure, tal cual lo muestran las imágenes abajo.

Debemos evitar poner los círculos correctamente en sus calzos respectivos en los Colure, porque todavía debemos tener holgura para instalar la última pieza: el segundo CaxeAxis. Es conveniente: (1) Poner solamente dos Colure en el CageAxis cuya parte de "arriba" quede pegada al Meridian; (2) Meter dicho CageAxis a presión en el palito pequeño del Meridian; (3) Instalar los 2 Colure restantes. Las imágenes abajo muestran el proceso.

Ahora lo que queda es acomodar los círculos para hacerlos calzar en los hoyitos de los Colure, y esto hay que hacerlo con mucho cuidado.

Lo único que nos queda es conseguir la configuración de las 4 imagenes abajo, lo cual requiere de cuatro cosas fundamentales.



En primer lugar, los TropicCircle tienen solamente 1 hoyito. Por ello es que cuando acomodamos el primer TropicCircle, el segundo debe tener su hoyito opuesto al primero.

En segundo lugar, el Equator tienen 2 hoyitos opuestos, los cuales deben ir "alternados" con los hoyitos de los TropicCircle (no arriba ni abajo de ninguno de ellos).

En tercer lugar, la Eclíptic tiene 4 hoyitos: los 21 de los meses de diciembre, marzo, junio y septiembre (siguiendo el orden de las imágenes arriba). Al acomodar la eclíptica el hoyito del 21 de junio (mes VI, tercera imagen de arriba), este debe coincidir con el hoyito del TropicCircle más cerca del palito corto. De la misma manera el hoyito del 21 de diciembre (mes XII, primera imagen de arriba), este debe coincidir con el hoyito del otro TropicCircle, que dijimos está opuesto al anterior.

En cuarto y último lugar, verificar que el 21 de marzo (mes III, segunda imagen arriba) y el 21 de septiembre (mes IX, cuarta imagen arriba) coincidan con los hoyitos del Equator.

Con todo esto hemos terminado de armar tanto la montura del horizonte como la esfera rotatoria, y con ello el correcto ensamblaje de las piezas.

(2) Pegado. Para pegar las piezas les sugerimos tener los siguientes materiales:

1. Bicarbonato de sodio.

2. Adhesivo del tipo "la gotita".

3. Una cuchara larga para acceder a los espacios más reconditos de la esfera rotatoria.

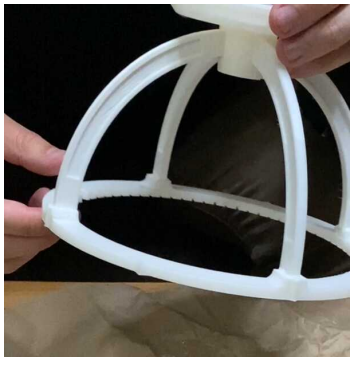
4. Papel kraft sobre el cual haremos todo el procedimiento.

5. Guantes de latex para evitar pegarse el adhesivo en los dedos.

Comenzaremos pegando las partes de la montura del horizonte. Ya la teníamos invertida, por ello ahora la ponemos en esa misma posición sobre el papel kraft.

Ahora con mucho cuidado le aplicamos gotitas de adhesivo sobre el área de contacto de cada HorizonLeg con el círculo del horizonte, ***una a una***. Debe ser una a una porque el adhesivo seca muy rápido, y hay que agregarle inmediatamente un poco de bicarbonato de sodio a la misma zona con ayuda de la cuchara larga, como podemos ver en las imágenes abajo. La mezcla entre el adhesivo líquido y el bicarbonato de sodio forma una especie de "cemento" que es extremadamente firme, y que se solidifica en menos de 1 minuto.

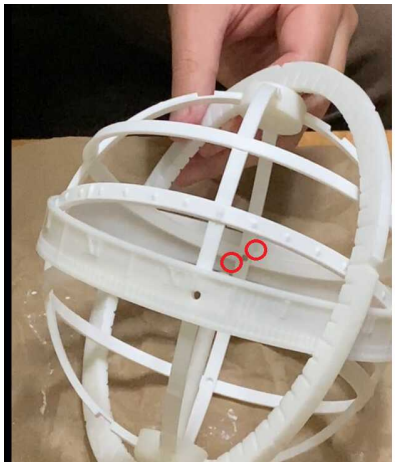
Finalmente hacemos lo mismo con cada una de las áreas de contacto entre las HorizonLeg y la Base. Terminado cada procedimiento, limpiamos el bicarbonato en polvo que no se solidificó en la montura, y así terminamos el pegado de la montura del horizonte.



Ahora pasamos a realizar el pegado de la esfera rotatoria. Para ello no olvidemos que muchas de sus piezas están acopladas por presión (CageAxis, Colure, Equator, TropicCircle), por lo que en estricto rigor lo único que queda por pegar bien es la Ecliptic.

Antes de pasar al adhesivo y al bicarbonato es importante asegurarse de que la esfera rotatoria que ya ensamblamos tenga sus hoyitos en orden, es decir, que los 21 de marzo y septiembre estén alineados con los hoyitos del Equator, y los 21 de diciembre y junio también lo estén con los hoyitos de los respectivos TropicCircle.

Solo seguros de aquello podemos aplicar el adhesivo y el bicarbonato en la esfera, y lo haremos por la parte interior. Aplicaremos estos materiales solamente en los reversos del 21 de junio y del 21 de diciembre, y en los puntos opuestos indicados en la imagen abajo a la izquierda (en círculos rojos).



Por un lado, solamente ponemos pegamento en esos puntos opuestos de ambos días por lo complicado que resulta meter el adhesivo y la cuchara larga dentro de la esfera. Por otro lado, solamente ponemos pegamento en esos dos hoyitos de la eclíptica (los solsticios) porque fijando aquellos quedan fijados también los otros dos hoyitos de la eclíptica (los equinoccios).

Luego de esperar que seque el pegamento, limpiamos la esfera del bicarbonato sobrante, y con ello hemos terminado el pegado de la esfera rotatoria.

Con todo lo anterior hemos terminado nuestra esfera armilar en su totalidad.

Cómo conseguir las esferas y semiesfera (actividad 3)

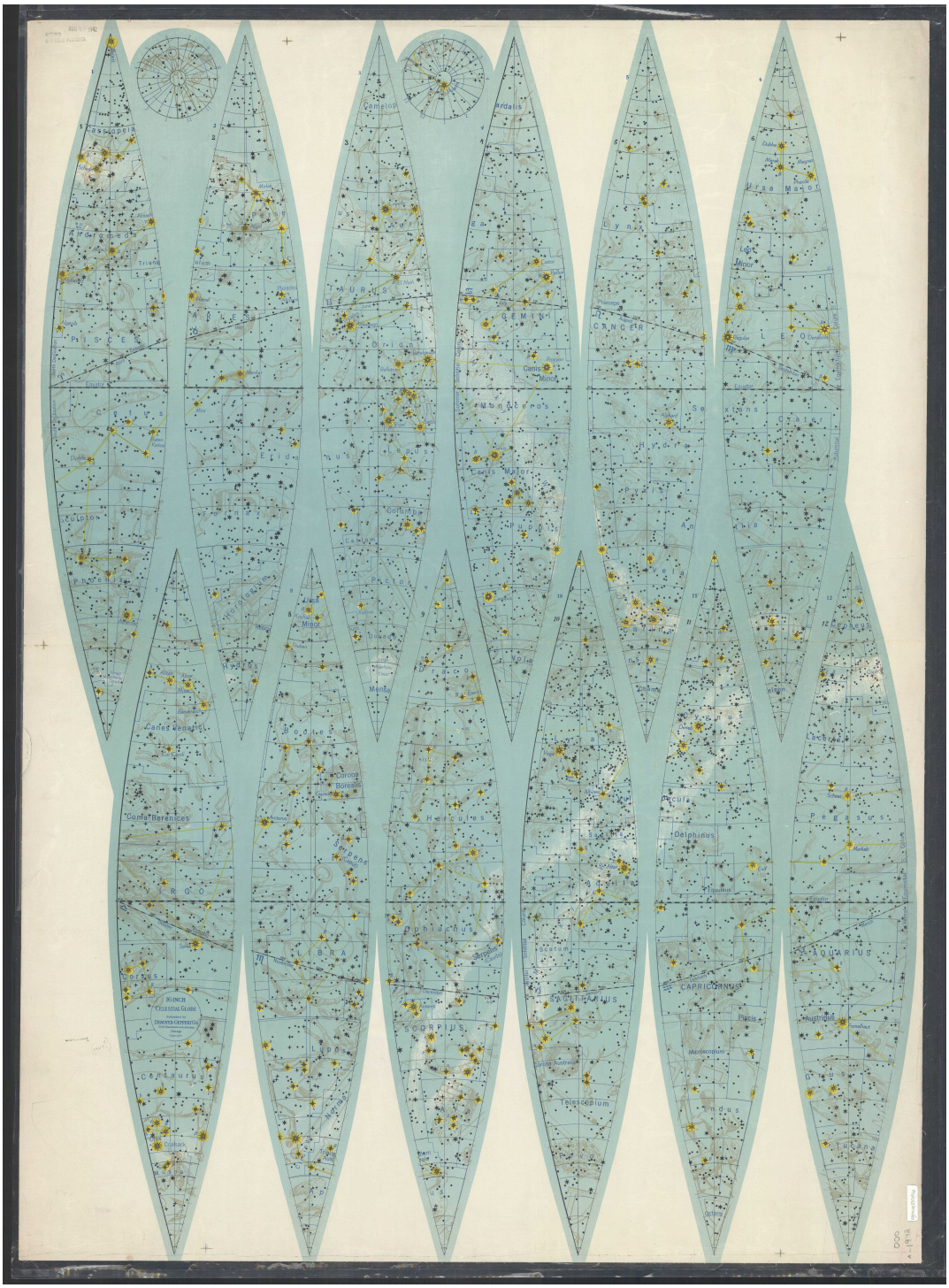
Esferas.

Gracias a los fondos del proyecto tuvimos la posibilidad de encargar a EEUU unos puzles 3D esféricos de 32 piezas, siendo la oscura la *esfera celeste* y la clarita la *esfera terrestre*. Considerando el elevado precio de cada una de estas piezas (más de 200.000 CLP por esfera), es lógico que debemos sugerir alguna alternativa viable a dichos puzles[74].

Una posibilidad que puedo ofrecer en estos momentos es conseguir esferas de plástico que son usadas como adornos navideños, que por lo general las personas llenan con dulces. Dichas esferas (que he visto en internet hasta de 20 cm de diámetro) son en realidad formadas por 2 semiesferas idénticas, que se pueden juntar mediante una pequeña pestañita con un hoyito que está presente en ambas.

[74] Si a pesar de ello igual le interesa saber cómo conseguirlas, le puedo indicar los pasos a seguir si me escribe a `creyesm1992@gmail.com`

Si uno pega dos de dichas semiesferas de manera permanente, entonces es posible adherir sobre su superficie algún mapa estelar por gajos, para lo cual sugiero buscar en internet "celestial globe gores". El ejemplo siguiente es de una belleza tremenda, tomado de la "American Geographical Society Library Digital Map Collection"[75]



[75] Para acceder a esta imagen en su tamaño original (6638 x 9000 px) entre al siguiente enlace: https://collections.lib.uwm.edu/digital/collection/agdm/id/34088/s

Esto es todo lo que puedo ofrecer con relación a la esfera celeste. Para la esfera terrestre habría que hacer una búsqueda similar: "terrestrial globe gores", aunque aquí hay mucha más variedad en la web.

Semiesfera.

Para construir la semiesfera de proyección necesitamos los siguientes materiales:

1. Una semiesfera de plástico de 20 cm (como las que mencionamos arriba).

2. Un marcador de punta fina (por ejemplo un sharpie) que sea delgado.

3. Un compás que permita "atornillarle" el marcador anterior.

4. Una cinta de enmascarar (pegote) de ancho 12 mm.

5. Un cúter (cartonero).

6. Una regla (lo más larga posible, ojalá de 40 cm).

7. Una superficie plana apta para soportar los cortes que haremos con el cúter a la cinta.

Antes de empezar el procedimiento, aclaramos dos cosas. Primero, que los cálculos que vienen a continuación fueron realizados para una esfera de radio R, y entre corchetes [ ] pondremos los valores para $R = 10$ (que es el valor para una semiesfera de diámetro 20 cm). Segundo, que todas las tiras de cinta que usemos tendrán un ancho de 6 mm, las cuales conseguiremos cortando con el cúter la cinta de ancho 12 mm por la mitad, con ayuda de la regla[76].

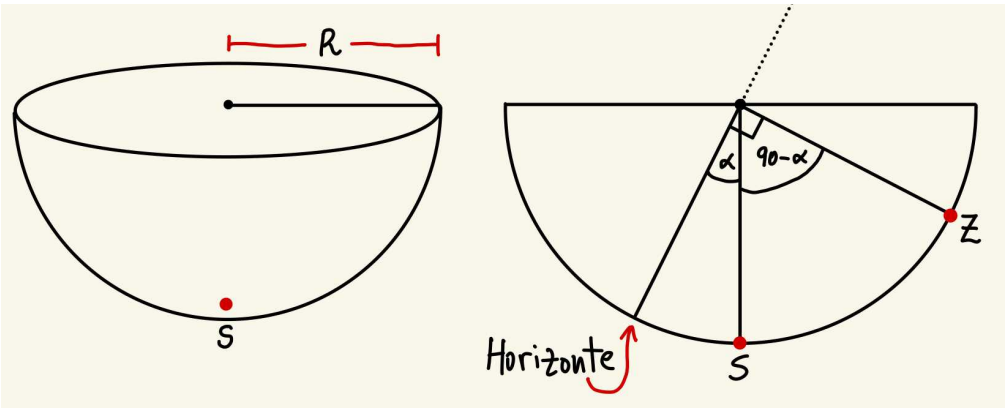
El polo y el zenit. Lo primero que hay que hacer es dibujar con el marcador de punta fina el punto central de la semiesfera, el cual representa el polo sur celeste S.

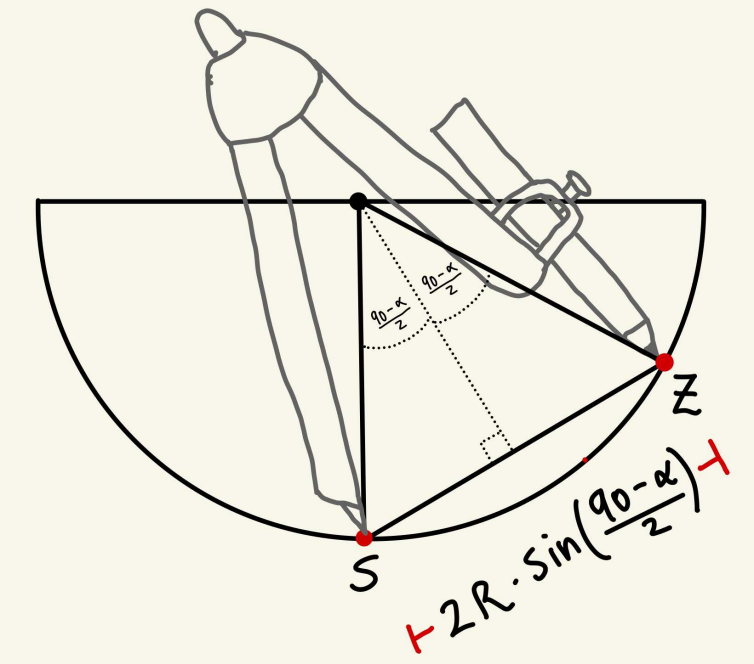
Luego, cortamos una tira de cinta de largo πR [31.4 cm] y ancho 6 mm, la cual debe quedar pegada *por dentro* desde un punto del borde de la semiesfera a su punto diametralmente opuesto, pasando por el ya marcado polo sur celeste. Debe ir por dentro porque luego ahí apoyaremos la aguja del compás, y la cinta ayuda a que la aguja quede afirmada.

A continuación, con un compás que tenga atornillado el sharpie, marcamos el zenit Z que está separado del polo sur S por un arco de $90-\alpha$ grados, donde α es la latitud del sitio al cual queremos construirle la esfera (en Concepción $\alpha = 36.81°$). Esto se logra abriendo el compás de tal manera que la distancia entre la aguja y la punta del sharpie sea de $2R\sin\left(\dfrac{90-\alpha}{2}\right)$ [8.95 cm]; poniendo la aguja sobre el punto S y viendo dónde toca a la cinta ya instalada.

Las imágenes en la página a continuación resumen lo dicho en este punto.

[76] La idea es que las cintas que usemos para marcar los círculos de altura y azimut sean lo más delgadas posibles pero a la vez que se vean de manera clara, y para ello 5-6 mm es suficiente. Lamentablemente no existen en el mercado cintas de menos de 12 mm de ancho (al menos que yo sepa).

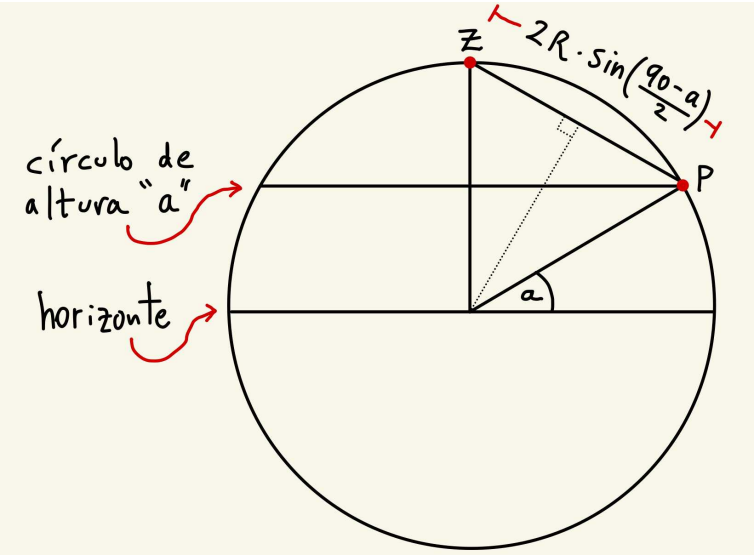

R
S
α
90-α
Z
Horizonte
S

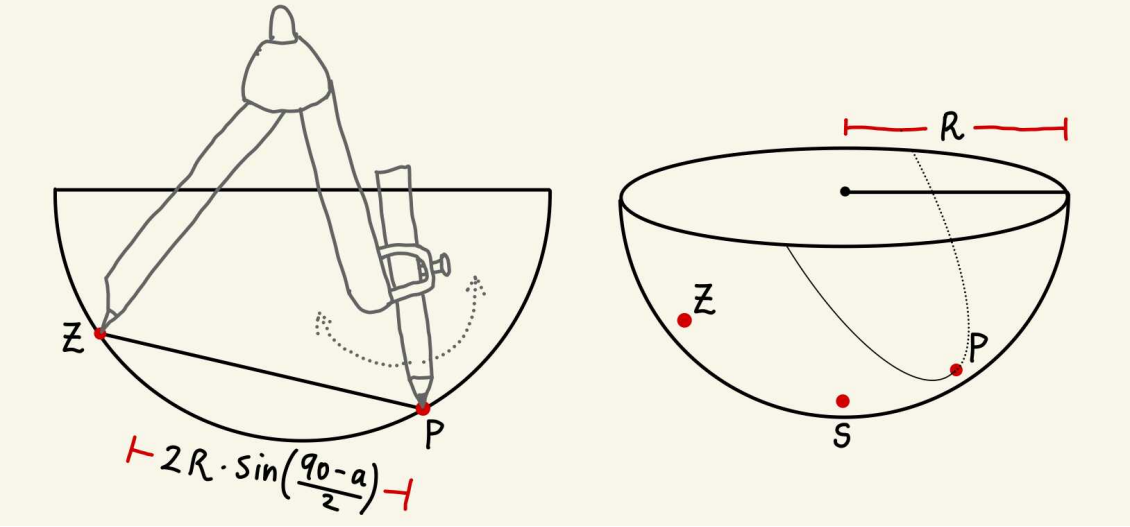

90-α/2
90-α/2
Z
S
2R·sin((90-α)/2)

Z
S

Los círculos de altura. Ya habiendo marcado el punto del zenit Z, ahora lo que haremos será trazar los círculos de altura de 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 y 90 grados, mientras que las alturas negativas las haremos hasta donde nos de la semiesfera[77]. Es muy importante considerar que para concretar cada uno de esos círculos, primero lo marcaremos con el sharpie en la parte interior de la semiesfera, y luego pegaremos por la parte exterior una tira de cinta que coincida con la línea interior realizada con el sharpie. Cuando ya esté todo hecho, borraremos las líneas del marcador con un papel higiénico ligeramente empapado en alcohol.

En las figuras siguientes vemos que el círculo de altura a lo haremos poniendo la aguja del compás en el zenit Z, de tal manera que la distancia entre dicha aguja y la punta del sharpie sobre un punto P de la parte interior de la semiesfera sea de $2R\sin\left(\dfrac{90-a}{2}\right)$.





[77] No haremos la altura de 80° porque su círculo queda demasiado pequeño, y cuesta mucho pegar la cinta.

Así es como trazaremos con el compás y el sharpie cada uno de los círculos de altura en el ***interior*** de la semiesfera, para que cuando los tengamos todos cortaremos las tiras de cinta que pegaremos "encima" de dichos círculos, pero por la cara ***exterior*** de la semiesfera. La imagen a continuación muestra cómo quedan estos círculos en cada etapa.

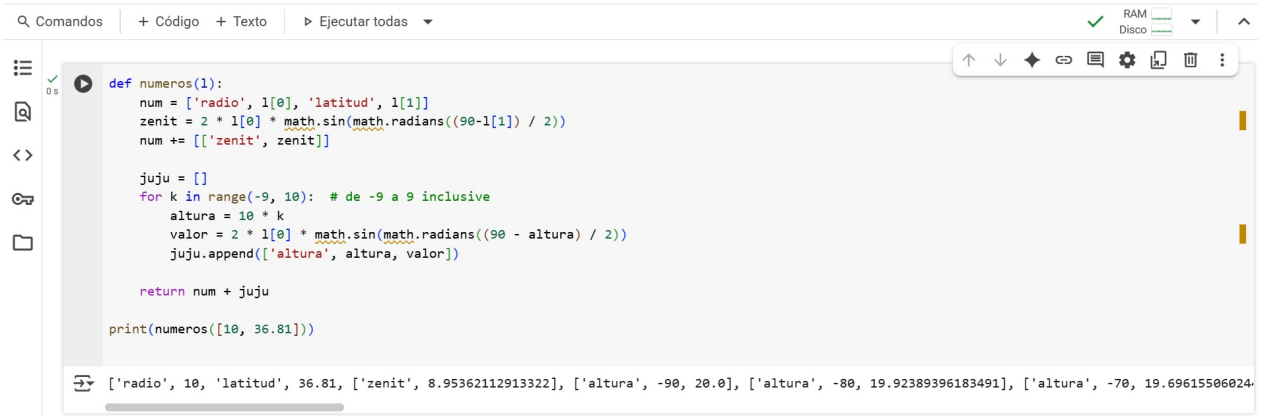
Los valores de la apertura L del compás para cada altura a están regidos por la formula que ya hemos visto: $L = 2R\sin\left(\frac{90-a}{2}\right)$. Si tabulamos todas las alturas entre -90 y 90° de 10 en 10, considerando $R = 10$, y adicionalmente le agregamos a dicha tabla la apertura para dibujar el zenit, entonces obtendremos lo siguiente:

Zenit	8.95
Altura a	**Apertura** L **(en cm)**
-90	20
-80	19.92
-70	19.69
-60	19.31
-50	18.79
-40	18.12
-30	17.32
-20	16.38
-10	15.32
0	14.14
10	12.85
20	11.47
30	10
40	8.45
50	6.84
60	5.17
70	3.47
80	1.74
90	0

Todos estos valores los obtuvimos ingresando a Python[78] el siguiente código, que recibe como entrada un par de números $[R, \alpha]$, donde R es el valor del radio de la semiesfera y α la latitud que estemos considerando.

```
import math

def numeros(l):
num = [’radio’, l[0], ’latitud’, l[1]]
zenit = 2 * l[0] * math.sin(math.radians((90-l[1]) / 2))
num += [[’zenit’, zenit]]

juju = []
for k in range(-9, 10):  # de -9 a 9 inclusive
altura = 10 * k
valor = 2 * l[0] * math.sin(math.radians((90 - altura) / 2))
juju.append([’altura’, altura, valor])

return num + juju

print(numeros([10, 36.81]))
```

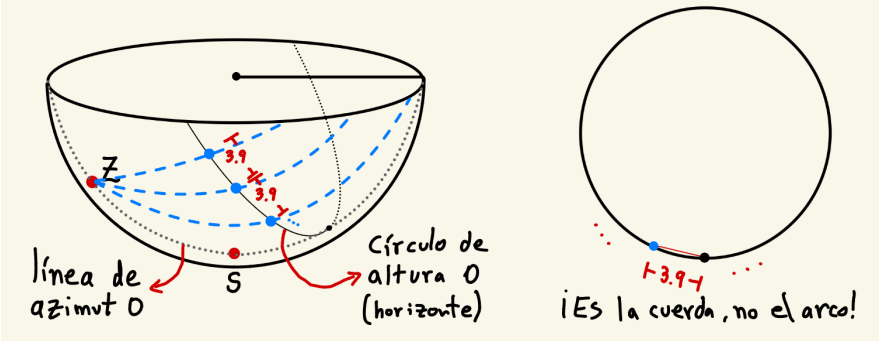
Al ingresarlo al Python debería verse como en la imagen siguiente:



[78] Como por ejemplo en https://colab.research.google.com

Los círculos de azimut. Ahora solo nos queda trazar las líneas de azimut.

Las líneas de azimut las haremos de 22.5° en 22.5° ($22.5° = \frac{360°}{16}$). Para hacer esto cortaremos 8 tiras de 32 cm de largo y 6 mm de ancho, y haciendo que pase por el zenit Z, la pegamos de tal manera que pase también por los puntos sobre el horizonte (altura 0) separados por $\frac{2\pi R}{16}$ [3.9] cm (abertura del compás), tomando como referencia la línea de azimut 0 sobre la que dibujamos el polo sur S y el zenit Z al inicio.



El proceso debe quedar como en las imágenes a continuación.

Cómo conseguir los materiales para la actividad 4

En la actividad 4 hemos usado los siguientes materiales:

1. Un mapa con las principales localidades mencionadas durante esta actividad, con una leyenda y también un código QR que lleva al Instagram del proyecto @geometrasdelcielo.

2. Un mazo de 25 cartas, donde las primeras 24 son eventos y personajes históricos vistos en esta actividad, y la última contiene el orden correcto de las otras 24.

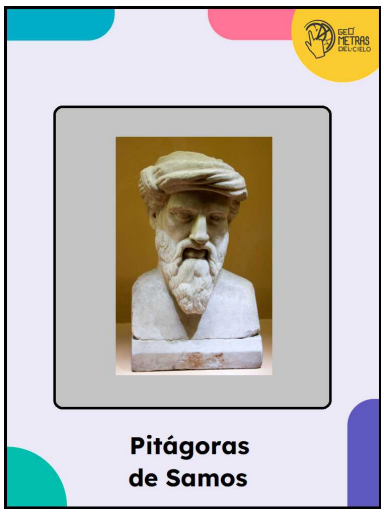
El mapa está en la siguiente página, y a continuación todas las cartas utilizadas.

Mapa para la actividad 4

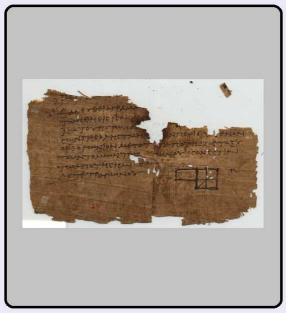
1. Isla de Samos, Grecia
2. Alejandría, Egipto
3. Francia
4. Holanda
5. Inglaterra
6. Alemania
7. Rusia
8. Hungría
9. Irlanda
10. Bagdad, Irak
11. Toledo, España
12. Shiraz, Irán
13. Granada, España
14. Samarcanda, Uzbekistán
15. La Meca, Arabia Saudita
16. Medina, Arabia Saudita
17. Turquía
18. Libia
19. Túnez
20. Gazni, Afganistán
21. Nicea, Turquía
22. Harrán, Turquía
23. Kuwait
24. Doha, Qatar
25. Aragón, España
26. Castilla, España
27. Fez, Marruecos
28. El Cairo, Egipto
29. Damasco, Siria
30. Alepo, Siria

geometrasdelcielo

Proyecto ALMA-ANID 31230006



Pitágoras de Samos

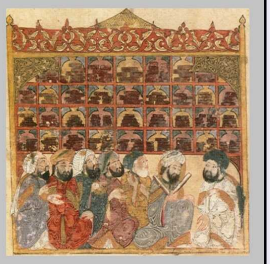


Elementos de Euclides

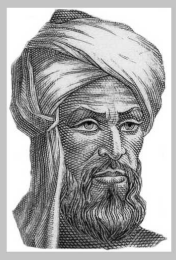
La Hégira

Llegada del Islam a la Península Ibérica

Musulmanes descubren el astrolabio



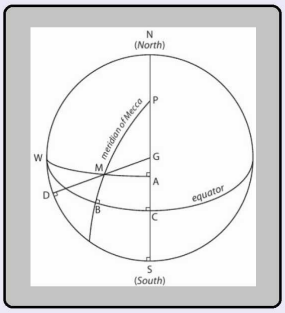
Casa de la Sabiduría de Bagdad



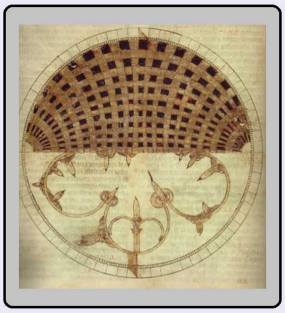
Álgebra de Al-Juarismi

Primer astrolabio firmado y fechado

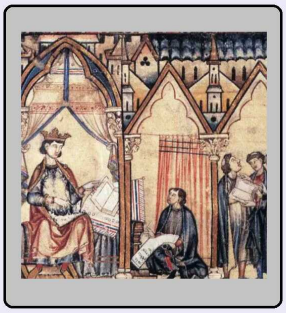
Astrolabio de al-Khujandi



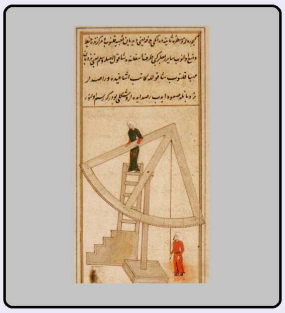
Cálculo de la quibla por al-Biruni



Astrolabios universales de Azarquiel e Ibn-Jalaf



Escuela de traductores de Toledo



Primeros muwaqqit, en el Sultanato Maleluco

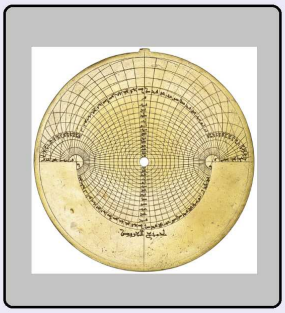
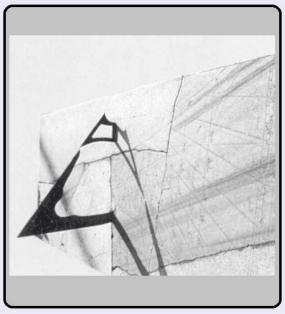
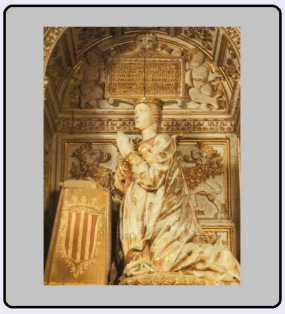


Lámina universal de Ibn-Baso hijo

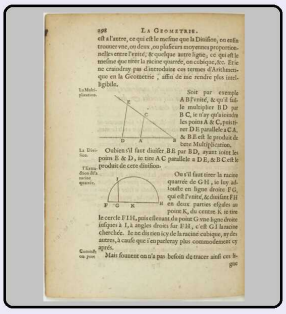
Astrolabio universal de Ibn al-Sarraj



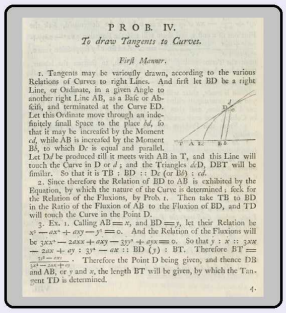
Reloj de Sol de Ibn al-Shatir



Pedro IV regala un astrolabio a su hija Leonor de Aragón



Geometría analítica de René Descartes



PROB. IV.

To draw Tangents to Curves.

First Manner.

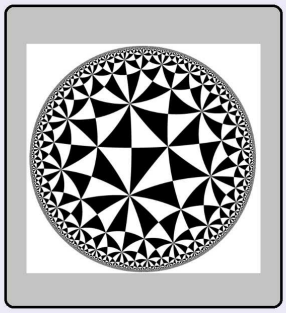
1. Tangents may be variously drawn, according to the various Relations of Curves to right Lines. And first let BD be a right Line, or Ordinate, to a given Angle to another right Line AB, as a Basis or Abfciſs, and terminated at the Curve ED. Let this Ordinate move through an indefinitely ſmall Space to the place *bd*, ſo that it may be increaſed by the Moment *cd*, while AB is increaſed by the Moment BA, to which Dc is equal and parallel. Let Dd be produced till it meets with AB in T, and this Line will touch the Curve in D or *d*; and the Triangles dcD, DBT will be ſimilar. So that it is TB : BD :: Dc (or BA) : *cd*.

2. Since therefore the Relation of BD to AB is exhibited by the Equation, by which the nature of the Curve is determined; ſeek for the Relation of the Fluxions, by Prob. 1. Then take TB to BD in the Ratio of the Fluxion of AB to the Fluxion of BD, and TD will touch the Curve in the Point D.

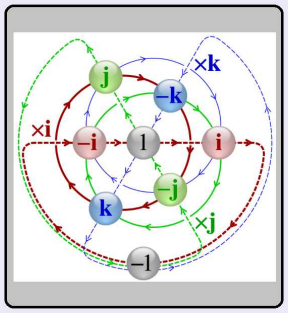
3. Ex. 1. Calling AB $= x$, and BD $= y$, let their Relation be $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. And the Relation of the Fluxions will be $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + \dot{x}y - 3y^2\dot{y} = 0$. So that $y : \dot{x} :: 2ax - 3xx + ay : 3y^2 - ax$ :: BD (*y*) : BT. Therefore $BT = \frac{y\dot{x}}{3y^2 - ax + ay - 3xx}$. Therefore the Point D being given, and thence DB and AB, or *y* and *x*, the length BT will be given, by which the Tangent TD is determined.

4.

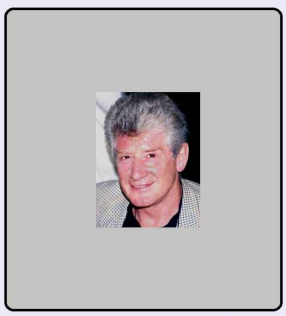
Cálculo de Isaac Newton



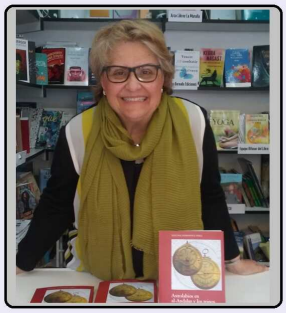
Geometría hiperbólica de Nikolai Lobachevski



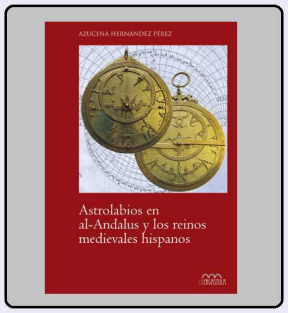
Cuaterniones de William Rowan Hamilton



Nacimiento del historiador David A. King



Nacimiento de la historiadora Azucena Hernández Pérez



Publicación del libro de Azucena Hernández Pérez "Astrolabios..."

Orden correcto

1. Pitágoras de Samos (500 a.C.)
2. Elementos de Euclides (300 a.C.)
3. La Hégira (622)
4. Llegada del Islam a la Península Ibérica (711)
5. Musulmanes descubren el astrolabio (750)
6. Casa de la Sabiduría de Bagdad (800)
7. Algebra de al-Juarismi (820)
8. Primer astrolabio firmado y fechado (927)
9. Astrolabio de al-Khujandi (984)
10. Cálculo de la quibla por al-Biruni (1025)
11. Astrolabios universales de Azarquiel e Ibn-Jalaf (1050)
12. Escuela de traductores de Toledo (1150)
13. Primeros muwaqqit, en el Sultanato Mameluco (1280)
14. Lámina universal de Ibn-Baso hijo (1304)
15. Astrolabio universal de Ibn al-Sarraj (1328)
16. Reloj de Sol de Ibn al-Shatir (1371)
17. Pedro IV regala un astrolabio a su hija Leonor de Aragón (1376)
18. Geometría analítica de René Descartes (1637)
19. Cálculo de Isaac Newton (1675)
20. Geometría hiperbólica de Nikolai Lobachevski (1830)
21. Cuaterniones de William Rowan Hamilton (1843)
22. Nacimiento del historiador David A. King (1941)
23. Nacimiento de la historiadora Azucena Hernández Pérez (1956)
24. Publicación del libro de Azucena Hernández Pérez "Astrolabios..." (2018)

Agradecimientos

En primer lugar, mis mayores agradecimientos son para los Fondos ALMA-ANID de Astronomía, que en su convocatoria 2023 aceptaron mi propuesta y cumplieron uno de mis sueños: realizar divulgación científica que interconecte las matemáticas, la astronomía y la historia de la ciencia, en varios puntos del país, y con recursos suficientes para armar un equipo de personas que estén en la misma sintonía. El reconocimiento oficial es el siguiente:

Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo / Fondo ALMA 2023 / 31230006

Agradezco profundamente a Pamela Paredes, quien en 2023 me mostró la existencia del mencionado fondo, motivándome a postular dicho año con un proyecto de divulgación astronómico-matemático. Y no solo le agradezco por motivarme a postular, sino también por haberme aconsejado en todo el transcurso del proyecto.

Considerando los tiempos acotados con los que conté para poder armar este proyecto, me es imposible no agradecer al equipo que consideré al inicio, ya que aceptaron prácticamente al instante participar. El interés que mostraron por la propuesta fue una gran sorpresa, porque en ese entonces no era más que un sueño. Por el buen inicio del proyecto deseo darle las gracias a:

Paola Meza, por haber aceptado ser la subdirectora del proyecto. Su agilidad a la hora de realizar las gestiones en la sede Concepción fue fundamental para su buen desarrollo, con excelente voluntad y eficiencia.

Pamela Henríquez, por haber aceptado ser la administradora del proyecto, y por los valiosos consejos entregados a la hora de postularlo, ejecutarlo y cerrarlo. Su vasta experiencia en estos terrenos fue fundamental para poder hacer que este proyecto funcionase correctamente, y le estoy muy agradecido.

Luis Angulo, por haberme introducido en el fascinante mundo de las impresiones 3D.

Matthew Hartloff, por haber tenido una excelente disposición para indicarme cómo obtener las hermosas esferas celestes y terrestres que utilizamos en el proyecto.

Almeira Sampson, Pablo Hernández, Patricia Cortés y Carol Asencio, por aceptar ser los profesores encargados de las sedes inmediatamente apenas les presenté la idea inicial del proyecto. Porque para que todo esto funcionase, primero tuvo que haber empezado (evidentemente), y sin ellos y el equipo local que cada uno armó, esto no habría sido posible.

María Belén Bascur y Alejandra Ahumada, por haber mostrado gran entusiasmo cuando les propuse unirse al proyecto desde las comunicaciones y el diseño. Agradezco el alto nivel de perfección y creatividad de ambas, ya que construyeron una estética juvenil y original en nuestro Instagram oficial @geometrasdelcielo.

Rodrigo Vergara y Natalia Quintana, por explicarme los pormenores de las impresiones 3D, con paciencia y amabilidad, en esas largas sesiones de impresiones 3D en el MakeIt.

Fernando Marín, por haber construido todos los astrolabios del proyecto, participando activamente en su diseño y emsamblaje. Fue un placer haber contado con su capacidad de imaginar y materializar estos instrumentos.

Cuando empezamos a desarrollar el proyecto a nivel país, hubo mucha gente que colaboró de varias maneras para que *Geómetras del Cielo* cumpliera sus objetivos. Por ello agradezco a:

Monserrat González, Allizon Cifuentes, Joaquín Sepúlveda, Diego Sánchez y Wilfreg Martínez. Todos ellos fueron los monitores de Concepción, a los cuales formé y con los cuales compartí directamente. Gracias por su excelente disposición y entusiasmo.

Alonso Moya, Sebastián Rebhein, Valentina Soto, Isaac Imilpán, Claudia Paredes, Jesús Contreras y Daniel Martínez, por haber sido los monitores de las sedes de Puerto Montt, Valdivia y Santiago, respectivamente, haciendo un excelente trabajo, con alegría y precisión.

Cristian Quinzacara, por haber leído varios extractos previos de este manual, y por sus valiosísimos comentarios tanto técnicos como de apoyo. En particular, le agradezco por reconocer en más de una ocasión, y tanto en lo público como en lo privado, el valor y la calidad de un proyecto como este. Su apoyo ha sido muy importante, y desde nuestras extendidas y amenas conversaciones aquí en la Universidad San Sebastián he matizado y ampliado algunas de mis ideas. Gracias tocayo, has sido un gran colega y un gran amigo en todo este proceso.

Carlos Martinez, por mostrar gran interés por el proyecto cuando se lo presenté, y por la amplitud de miras con que dialogamos sobre la importancia de estas iniciativas. Siempre es un placer conversar contigo Carlos, tus sugerencias han sido de enorme valor, aparte de que trabajas con enorme responsabilidad y detalle.

Andrea Brunet, que como directora de la Biblioteca Regional de Los Lagos, nos acogió para realizar las actividades en dicho lugar. Muchas gracias Andrea por tu excelente recepción.

Ruth Evelyn Elgueta, encargada del área educativa del Museo de Historia Natural de Concepción, quien aceptó con entusiasmo promover el proyecto en distintas instancias dentro del Museo. Su excelente disposición y contagiosa alegría son cosas que agradezco muchísimo.

Tracy Catalán, por haber aceptado la labor de explicar los astrolabios en la capital.

Bryan Olivares, por guiarme en las configuraciones y los parámetros óptimos de las impresiones 3D, que están desplegados en el capítulo 2 de la parte II de este manual.

Pía Bizama, Romina Toledo (las primas de Germain) y Carolina Salgado, por haber aceptado participar en la jornada que organizamos en el MHNC de Mujeres, Geometría y Astronomía. Sus charlas sobre mujeres pre y post copernicanas estuvieron muy interesantes.

DIMAT, la Red de Divulgación de Matemáticas de Chile, a la cual orgullosamente pertenezco, y en la cual sus miembros han apoyado este proyecto desde sus inicios.

Ariel Cruz, por guiarme en la materialización de este manual con infinita paciencia.

Me gustaría también agradecer a las personas externas al equipo del proyecto que han entregado su apoyo, tanto en conversaciones personales como por su respaldo en el Instagram oficial del proyecto (@geometrasdelcielo). Me refiero a mis padres Mónica Monsalve y Cristian Reyes (atentísimo lector de los extractos de este libro), a mi hermano Matías Reyes (ahora un experto del astrolabio y de la esfera armilar), al grupo de los *Geometritas del Cielito* (gracias chic@s), a David Montoya y Pablo Miranda, Catalina Zamora, Ramón Mata, José Huaiquipán, Fernando Izaurieta, Harold Contreras, Rubén Sáez, y Lucilia Bascur.

Es imposible no agradecer a mis tres grandes fuentes de inspiración en este proyecto: a la historiadora del arte y de la ciencia Azucena Hernández Pérez; al historiador de la ciencia David A. King; y al programador y estudioso de estos instrumentos Óscar Ferro. Sus libros, artículos y videos han sentado las bases de todo lo que está aquí escrito, ¡Muchísimas gracias!

Finalmente, agradezco a los profesores y estudiantes escolares que trabajaron con nosotros, que viajaron durante todo un año a las sedes del proyecto en el país para poder aprender con los profesores y monitores encargados. Sus preguntas y sus consejos fueron extremadamente valiosos, los cuales he ido masticado durante todo el despliegue del proyecto y que he buscado integrar de la mejor manera posible. Agradezco también el hecho de que muchos de ellos me invitaron a sus colegios a apoyar actividades y mostrar el proyecto, creando lazos que permiten el contacto directo con estudiantes que les interesan estos temas. Como equipo nos damos por pagados por haber visto sus rostros de concentración, de alegría y de sorpresa.